Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

Д. СЕРІКБАЕВ атындағы ШЫҒЫС ҚАЗАҚСТАН МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

П.Б. Бейсебай

КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР

жоғары оқу орындарының техникалық мамандықтары бойынша оқитын студенттерге арналған оқу құралы

Өскемен
2011

ОӘЖ 517

Бейсебай П.Б. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және операциялық есептеулер: жоғары оқу орындарының техникалық мамандықтары бойынша оқитын студенттерге арналған оқу құралы /П.Б. Бейсебай/ ШҚМТУ.- Өскемен, 2011.-210 бет.

Оқу құралы математиканың арнаулы тарауларының бағдарламасы негізінде қазақ тілінде жазылған. Аталған жұмыста берілген теориялық мағлұматтар, әрбір мысалдардың толық сарапталған шешімдері студенттердің «Комплекс айнымалы функцияларының теориясы», «Операциялық есептеулер» тараулары бойынша білім сапасын, өз бетімен жұмыс істеу қабілеттілігін арттыруға арналған.

Ақпараттық технологиялар және энергетика факультетінің әдістемелік кеңесінде құпталған.

Пікір жазғандар:

Апышев О.Д., ҚР педагогикалық ғылымдар академиясының корреспондент мүшесі, ф.-м.ғ.к., Шығыс Қазақстан мемлекеттік университетінің математика кафердасының профессоры;

Базарбеков А.Б., ф.-м.ғ.д., Шығыс Қазақстан мемлекеттік университетінің математика кафедрасының профессоры;

Мұхамедиев Ғ.Х., ф.-м.ғ.к., Шығыс Қазақстан мемлекеттік техникалық университетінің «Машина жасау және көлік» факультетінің деканы.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Қазіргі таңдағы ғылым мен техниканың дамуы барысында зерттеу, үлгілеу және жобалау жұмыстарында математикалық әдістердің алатын орны ерекше.

Бұл пәнді оқып-үйрену объектісі - комплекс айнымалының аналитикалық функциялары және олардың табиғат заңдары мен техникалық әртүрлі құбылыстарды сипаттауда қолданулары.

Кредиттік технологиямен оқыту жүйесі енгізілген жылдардан бастап техникалық оқу орындарында жоғары математика курсына бөлінентін сағат мөлшері азайып, ал өтілетін материалдар көлемі кеміген емес. Әдетте инженерлік мамандықтар үшін математиканың мемлекеттік стандартқа сәйкес оқытылатын алгебра, геометрия және математикалық талдау бөлімдерімен қоса, математикалық талдаудың қосымша тараулары ретінде комплекс айнымалы функциялар мен операциялық есептеулер теориялары да оқытылады.

Болашақ инженерлер үшін комплекс айнымалы функциялары мен операциялық есептеулер теорияларының маңызы зор.

Олар теориялық физикада, аэродинамикада және гидродинамикада, техникада зерттеудің қуатты құралы болып табылады.

Ұсынылып отырған оқу құралы «Комплекс айнымалы функциялар теориясы» және «Операциялық есептеулер» атты екі бөлімнен тұрады. Оқу құралы жоғары оқу орындарының техникалық мамандықтарының студенттеріне арналады.

Оқу құралында комплекс айнымалы функциялар мен операциялық есептеулер теорияларының негізгі тақырыптары толығымен қамтылып, олардың кейбір техникалық есептерде қолданулары келтірілген. Тақырыптардың теориялық материалдары арнайы таңдап алынған көрнекі есептердің көмегімен жан жақты талқыланған. Сонымен қатар күрделі ақпаратты бағыттап оқыту арқылы аталған курстың комплекс айнымалы функциялар және олардың дифференциалдық, интегралдық есептеулері, қатарлар мен шегермелер, операциялық есептеулер тарауларын игерудің өзіндік тиімді жолдары қарастырылған.

Ұсынылған құралда талданған материалдар, жан-жақты сарапталған мысалдар мен жаттығулар студенттердің материалды өз бетімен игеруін жеңілдетуге елеулі қолғабысын тигізеді деп есептеймін. Сондай-ақ, осы тарауға арналып қазақ тілінде жазылған әдістемеліктер мен оқулықтардың жоқтың қасы болуы, аталған құралды жарыққа шығару қажеттілігін көрсетеді.

Автор оқу құралының рецензенттері - физика-математика ғылымдарының докторы, профессор А.Б. Базарбековке, физика-математика ғылымдарының кандидаттары профессор О.Д. Апышевқа және Ғ.Х. Мұхамедиевке зор алғысын білдіреді.

1 КОМПЛЕКС САНДАР

1.1 Комплекс сандар ұғымы

Анықтама 1. *Комплекс сан* деп реттелініп алынған *x* және *y* нақты сандар жұбы аталады да, $z = (x, \mathrm{y})$ түрінде белгіленеді.

Анықтамадан $z_1 = (x_1, \mathrm{y}_1)$, $z_2 = (x_2, \mathrm{y}_2)$ сандары тек $x_1 = x_2$ және $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$ болғанда ғана тең болатыны шығады:

$$(x_1, \mathrm{y}_1) = (x_2, \mathrm{y}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2 \end{cases}.$$

Мысалы 1: $(-2{,}4) \neq (4{,}\text{-}2)$.

$z = (x, \mathrm{y})$ комплекс саны үшін *x* оның нақты бөлігі, ал *y* жорамал бөлігі деп аталады (белгіленулері: $x = \mathrm{Re}\,\mathrm{z}$, француздың «reelle-нақты» сөзінен; $y = \mathrm{Im}\,\mathrm{z}$, «imaginaire-жорамал» деген француз сөзінен алынған). $(0, 0)$ - нөлдік комплекс сан.

Мысалы 2: $(x, \mathrm{y}) = (-2{,}4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}.$

Ескерту: Комплекс сандар үшін $\mathrm{z}_1 > \mathrm{z}_2$ $(\mathrm{z}_1 < \mathrm{z}_2)$ ұғымы жоқ.

1.2 Комплекс сандарға қолданылатын арифметикалық амалдар

Анықтама 2. Екі $z_1 = (x_1, \mathrm{y}_1)$, $z_2 = (x_2, \mathrm{y}_2)$ комплекс сандарының қосындысы деп (x_1+x_2, y_1+y_2) санын айтамыз. Қосынды $z_1 + z_2$ түрінде белгіленеді:

$$z_1 + z_2 = (x_1, \mathrm{y}_1) + (x_2, \mathrm{y}_2) = (x_1 + x_2,\ \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2) \tag{1}$$

Анықтама 3. $z_1 = (x_1, \mathrm{y}_1)$ мен $z_2 = (x_2, \mathrm{y}_2)$ екі комплекс санының көбейтіндісі деп (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1) санын айтамыз. Көбейтінді $z_1 \cdot z_2$ түрінде белгіленеді:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2}$$

Комплекс сандарды қосу және көбейту амалдары нақты сандарды қосу және көбейту амалдары арқылы берілгендіктен олар қосу мен көбейту амалдарының барлық аксиомаларын қанағаттандырады. Атап айтсақ:

1) қосудың коммутативтілігі: $\mathrm{z}_1 + z_2 = z_2 + \mathrm{z}_1$;
2) көбейтудің коммутативтілігі: $\mathrm{z}_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot \mathrm{z}_1$;
3) қосудың терімділігі: $\mathrm{z}_1 + (z_2 + \mathrm{z}_3) = (\mathrm{z}_1 + z_2) + \mathrm{z}_3$;
4) көбейтудің терімділігі: $\mathrm{z}_1(z_2\mathrm{z}_3) = (\mathrm{z}_1 z_2)\mathrm{z}_3$;
5) көбейтудің қосуға қатысты үлестірімділігі: $\mathrm{z}_1(z_2 + \mathrm{z}_3) = \mathrm{z}_1 z_2 + \mathrm{z}_1\mathrm{z}_3$.

Анықтама 4. $z_1 = (x_1, \mathrm{y}_1)$, $z_2 = (x_2, \mathrm{y}_2)$ комплекс сандарының айырмасы деп $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$ санын айтамыз. Айырма $z_1 - z_2$ түрінде белгіленеді:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2). \tag{3}$$

Анықтама 5. $z_1 = (x_1, \mathrm{y}_1)$ санының $z_2 = (x_2, \mathrm{y}_2) \neq (0, 0)$ санына қатынасы деп

$\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$ санын айтамыз. Қатынас $\frac{z_1}{z_2}$ түрінде белгіленеді:

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right),\ x_2^2+y_2^2\neq 0. \tag{4}$$

Мысалы 3: $z_1=(3,-7)$, $z_2=(1,4)$ сандары берілген. z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ сандарын табыңыз.

Шешімі:

$$z_1+z_2=(3,-7)+(1,4)=(3+1,-7+4)=(4,-3),$$
$$z_1-z_2=(3,-7)-(1,4)=(3-1,-7-4)=(2,-11),$$
$$z_1\cdot z_2=(3,-7)\cdot(1,4)=(3\cdot 1-(-7)\cdot 4, 3\cdot 4+(-7)\cdot 1)=(10,5),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(3,-7)}{(1,4)}=\left(\frac{3\cdot 1-(-7)\cdot 4}{1^2+4^2},\frac{1\cdot(-7)-3\cdot 4}{1^2+4^2}\right)=\left(-\frac{25}{17},-\frac{19}{17}\right).$$

Жорамал бөлігі нөлге тең, яғни $(x,0)$ санын қысқаша x деп, $(0,1)$ санын i деп белгілейміз, яғни $(x,0)=x$, $(0,1)=i$ деп ұйғарамыз. Комплекс сандарға амалдар қолдануда i санының орны ерекше.

Кез келген $z=(x,y)$ комплекс саны үшін

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)(0,1)=x+iy$$

теңдігі орынды, яғни $z=(x,y)$ комплекс санын *нақты x* пен *таза жорамал yi* сандарының қосындысы ретінде қарастыруға болады. z санының $x+iy$ түрінде жазылуын оның *алгебралық түрде* жазылуы дейміз.

Алғаш рет «*комплекс сан*» атауын К. Гаусс (1777-1855), ал i белгісін Л. Эйлер (1707-1783) енгізген.

Мысал 4: $z_1=-3$, $z_2=4$, $z_3=-2i$, $z_4=i$, $z_5=-3+2i$, $z_6=4-i$ комплекс сандары берілсін. Әрбір санның нақты және жорамал бөліктерін көрсетіңіз де оларды z=x+iy алгебралық түрінде жазыңыз.

Шешімі:

$$\operatorname{Re} z_1=-3,\quad \operatorname{Re} z_2=4,\quad \operatorname{Re} z_3=0,\quad \operatorname{Re} z_4=0,\quad \operatorname{Re} z_5=-3,\quad \operatorname{Re} z_6=4,$$
$$\operatorname{Im} z_1=0,\quad \operatorname{Im} z_2=0,\quad \operatorname{Im} z_3=-2,\quad \operatorname{Im} z_4=1,\quad \operatorname{Im} z_5=2,\quad \operatorname{Im} z_6=-1,$$
$$z_1=-3+i\cdot 0,\quad z_2=4+i\cdot 0,\quad z_3=0+i\cdot(-2),\quad z_4=0+i\cdot 1,\quad z_5=-3+i\cdot 2,\quad z_6=4+i\cdot(-1).$$

Анықтама 3-ті негізге алып

$$i^2=(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1,$$

яғни $i^2=-1$ болатынын көреміз. Осы теңдікті ескере отырып кез келген натурал k үшін келесі дәрежелерді айқындауға болады:

$$i^{4k}=\left(i^2\right)^{2k}=(-1)^{2k}=1,\quad i^{4k+1}=i^{4k}i=1\cdot i=i,$$
$$i^{4k+2}=i^{4k}i^2=1\cdot(-1)=-1,\quad i^{4k+3}=i^{4k}i^2i=1\cdot(-1)\cdot i=-i.$$

Комплекс санының z=x+iy алгебралық түріндегі жазылуын пайдаланып, комплекс сандарға қолданылатын арифметикалық амалдарды көпмүшеліктерге қолдану ережелері бойынша жүргізуге болады.

Мысал 5: 3-мысалдағы $z_1=(3,-7)$, $z_2=(1,4)$ сандарының қосындысын, айырмасын, көбейтіндісін және қатынасын олардың $z=x+iy$ түріндегі жазылуын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$$z_1+z_2=(3+i(-7))+(1+i4)=(3+1)+i(-7+4)=4-3i,$$

$$z_1-z_2=(3+i(-7))-(1+i4)=(3-1)+i(-7-4)=2-11i,$$

$$z_1\cdot z_2=(3+i(-7))\cdot(1+i4)=3\cdot1+3\cdot4i+i(-7)\cdot1+i^2(-7)\cdot4=$$
$$=3+12i-7i+(-1)\cdot(-28)=31+5i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-7i}{1+4i}=\frac{(3-7i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{3-12i-7i+28i^2}{1^2+4^2}=\frac{3-19i-28}{17}=$$
$$=\frac{-25-19i}{17}=-\frac{25}{17}-\frac{19i}{17}.$$

Мысал 6: $(4+2i)x+(5-3i)y=13+i$ теңдеуінің шешімін табыңыз.

Шешімі: Теңдеудің сол жағын алгебралық түрде жазып аламыз:

$$(4x+5y)+i(2x-3y)=13+i\ .$$

Бұдан екі комплекс санның теңдігінің белгісіне сүйеніп

$$\begin{cases}4x+5y=13,\\ 2x-3y=1\end{cases}$$

жүйесіне келеміз. Жүйенің шешімі $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}.$

Олай болса берілген теңдеудің шешімі $z=2+i$ саны болады.

Анықтама 6. Нақты бөліктері тең, ал жорамал бөліктері қарама-қарсы екі комплекс сандары *өзара түйіндес* деп атап,

$$z=x+iy\ ,\ \bar{z}=x-iy$$

түрлерінде белгілейміз.

Мысал 7: $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ болатынын дәлелдеңіз:

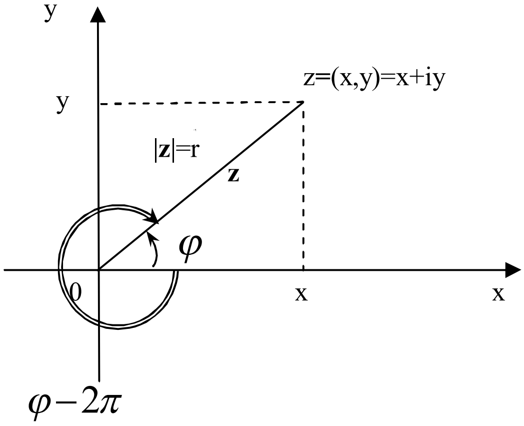
Дәлелдеуі: Анықтамаға сүйенсек

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=$$
$$=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

Дәлелдеу керегі осы еді.

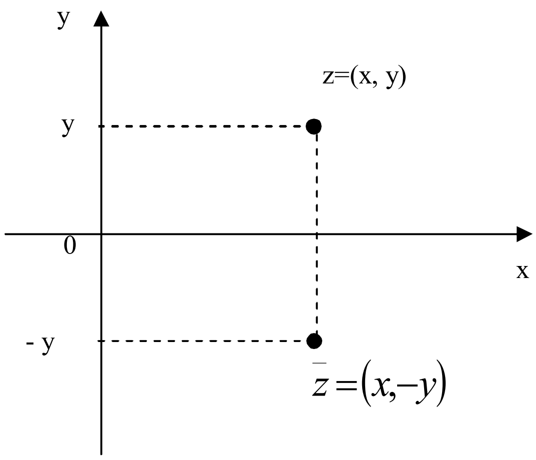
1.3 Комплекс сандардың геометриялық кескіні, модулі мен аргументі ұғымдары және тригонометриялық, көрсеткіштік пішіндері

Кез келген $z=(x,y)=x+iy$ санын xOy жазықтығының (x,y) нүктесі немесе **z**={x,y} векторы ретінде қарастыруға болады. Мұндағы xOy жазықтығы *комплекс жазықтық* (комплекс сандар жазықтығы), Ox өсі *нақты*, Oy өсі *жорамал өс* деп аталады (1-сурет).



1-сурет

$z=(x,y)$ және $\bar{z}=(x,-y)$ түйіндес сандары Ox өсіне қатысты симметриялы орналасады (2-сурет).



2-сурет

Анықтама 7. $z=(x,y)=x+iy$ санының *модулі* деп

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{5}$$

санын айтамыз.

Анықтамадан:

1) $|z|=|\bar{z}|$ болатыны;
2) z комплекс санының модулі z нүктесінен бас нүктеге дейінгі қашықтыққа немесе **z** векторының ұзындығына тең болатыны;
3) модульдері тең сандардың центрі бас нүктеде (нөл санында) орналасқан радиусы осы модульге тең шеңбердің нүктелерімен кескінделетіні шығады.

Мысал 8: $\left|\dfrac{z+2}{z-2}\right|\le 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орнын табу қажет.

Шешімі. Берілген теңсіздік $z\neq 2$ шартын қанағаттандыратын барлық z нүктелері үшін $|z+2|\le|z-2|$ теңсіздігіне пара-пар. $z=x+iy$ болсын, онда

$$|(x+2)+iy| \le |(x-2)+iy|.$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} \le \sqrt{(x-2)^2+y^2},$$

$$(x+2)^2+y^2 \le (x-2)^2+y^2,$$

$$4x \le -4x,$$

$$8x \le 0, \quad x \le 0.$$

Соңғы теңсіздік 0у өсімен сол жақ жарты жазықтықтың нүктелерінің жиынын анықтайды (және бұл нүктелер $z \ne 2$ шартын қанағаттандырады).

Өзара түйіндес $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ комплекс сандары үшін $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$ және

$$z \cdot \bar{z} = (x + i\,y)\cdot(x - i\,y) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

теңдіктері орынды.

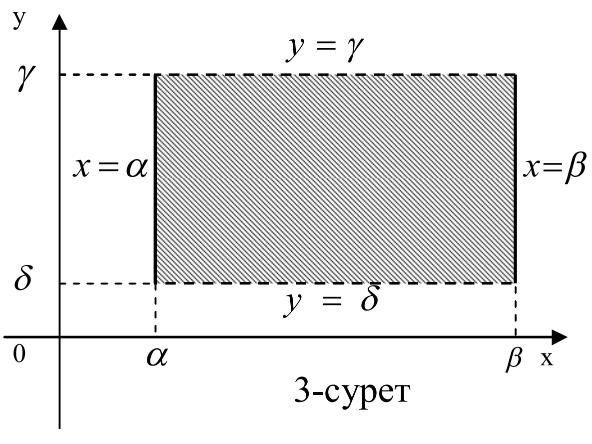
Мысал 9: 1) $\alpha \le \operatorname{Re} z \le \beta$ және $\delta < \operatorname{Im} z < \gamma$;

2) $\operatorname{Im} z^2 > 2$

шарттарымен анықталатын z комплекс айнымалыны кескіндейтін нүктелер жиынын анықтау керек.

Шешімі: z=x+iy санын xOy жазықтығының (x,y) нүктесі ретінде қарастырамыз.

1) z=x+iy болсын. Онда $\alpha \le \operatorname{Re} z \le \beta$ және $\delta < \operatorname{Im} z < \gamma$ теңсіздіктері $\alpha \le x \le \beta$ және $\delta < y < \gamma$ теңсіздіктеріне пара пар болады. Ал бұл теңсіздіктер $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \delta$, $y = \gamma$ түзулерімен шектелген тіктөртбұрыштың нүктелерінің $x = \alpha$, $x = \beta$ түзулерінің кесінділерінің нүктелерін қоса есептегендегі жиынын анықтайды (3-сурет).



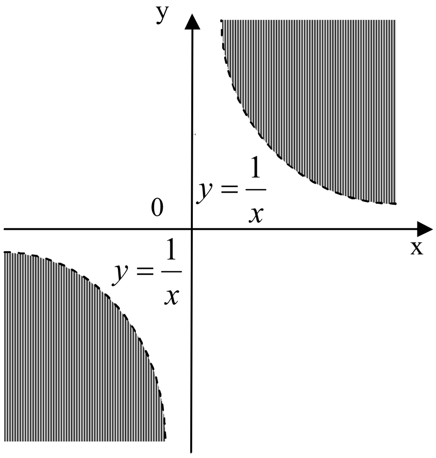
3-сурет

2) $z = x + iy$ болсын. Онда

$$\operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}\left((x+iy)^2\right) = \operatorname{Im}\left((x^2 - y^2) + i2xy\right) = 2xy.$$

Сонымен, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$.

Шарт бойынша $2xy > 2$ немесе $xy > 1$. Бұдан $y > \dfrac{1}{x}$, егер $x > 0$ және $y < \dfrac{1}{x}$, егер $x < 0$ шарттарын аламыз. Бұл шарттар оң және сол жарты жазықтықтарының $xy = 1$ гиперболасынан сәйкес жоғары және төмен орналасқан нүктелер жиынын анықтайды (4-сурет).



4-сурет

Мысал 10: $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}$ теңдеуі қандай сызықты береді?

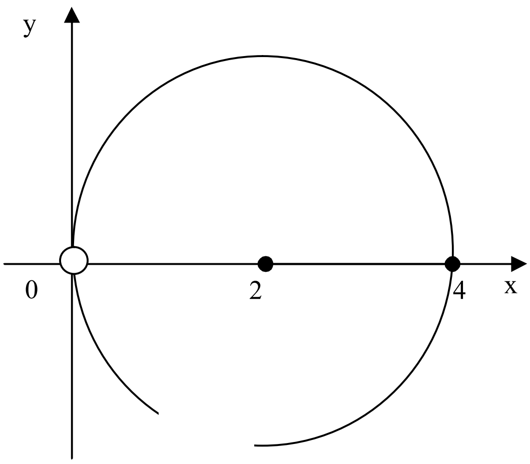
Шешімі: $z=x+iy$ болсын. Онда

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Шарт бойынша

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4} \text{ немесе } (x-2)^2+y^2=4.$$

Бұл теңдеу центрі $(2,0)$ нүктесі болатын, радиусы 2-ге тең шеңберді береді. Бұдан $z=(0,0)$ нүктесі анықталу жиынына тиіссіз екенін ескерсек, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}$ теңдеуінің O(0,0) нүктесі аласталған осы шеңберді беретіні шығады (5-сурет).



5-сурет

Анықтама 8. z санының *аргументі* деп Ох өсін z санын кескіндейтін **z** векторының бағытымен беттестіру үшін бұратын бұрышты айтамыз. z санының аргументін $Arg\ z$ түрінде белгілейміз.

Ескерту: Сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бұру *бағыты оң*, ал бағыттас бағыты *теріс бағыт* деп есептелінеді.

Мысалы үшін 1-суреттегі φ бұрышы z санының оң таңбалы аргументі, ал $\varphi - 2\pi$ теріс таңбалы аргументі болады. Анықтамадан, егер φ бұрышы z санының аргументі болса, онда $\varphi + 2k\pi$ бұрышы k -ның кез келген бүтін мәнінде z санының аргументі болатыны және аргументтің кез келген мәнінің

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

теңдігінен алынатыны шығады.

Сонымен $\operatorname{Arg} z$ шамасы шексіз көп мәнді болып шықты. Оның $(-\pi, \pi]$ аралығына тиісті мәнін *аргументтің бас мәні* деп атаймыз да $\arg z$ түрінде белгілейміз. Нәтижесінде

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

түріндегі аргументтің кез келген мәнін анықтайтын формуланы аламыз.

Егер φ бұрышы z=x+iy санының аргументі болса, онда

$$x = |z| \cos\varphi, \quad y = |z| \sin\varphi \tag{6}$$

болады да, z саны

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{7}$$

түрінде жазылады. z санының бұл түрі оның *тригонометриялық пішіні* деп аталады.

Кейіннен қатарлар ұғымына тоқталғанда комплекс айнымалы көрсеткіштік функциясы ұғымы енгізіліп

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{8}$$

түріндегі Эйлер формуласы беріледі.

Оның көмегімен (7) теңдігі

$$z = |z| e^{i\varphi} \tag{9}$$

түрінде жазылады. Комплекс санның бұл жазылым түрін оның *көрсеткіштік пішіні* деп атаймыз.

Қарастырылған (6) теңдіктерінен аргументтің бас мәнін табудың келесі формуласын аламыз:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{егер } x > 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{егер } x < 0,\ y \geq 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{егер } x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{10}$$

$|z_1| = |z_2|$ және $\arg z_1 = \arg z_2$ теңдіктері $z_1 = z_2$ теңдігінің белгісі болады. Түйіндес сандар үшін

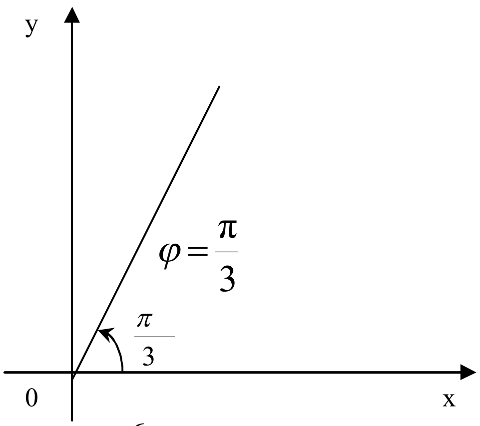
$$|z| = |\bar{z}|, \quad \arg z = -\arg \bar{z}, \quad \text{егер } \arg z \neq 0, \pi,$$

$$\arg z = \arg \bar{z}, \quad \text{егер } \arg z = 0, \pi$$

теңдіктері орынды.

Мысал 11: $\arg z = \frac{\pi}{3}$ шартымен жазықтықтағы нүктелердің қандай жиындары кескінделеді?

Шешімі: Аргументтері $\varphi = \frac{\pi}{3}$ болып келетін z нүктелері координаталар жүйесінің басынан басталынып, нақты өспен $\frac{\pi}{3}$ бұрышын жасайтын сәуленің бойында орын алады. Керісінше осы сәулеге тиісті кез келген z нүктесі (саны) үшін $\arg z = \frac{\pi}{3}$ теңдігі орындалады. Демек, $\arg z = \frac{\pi}{3}$ шарты осы сәулені анықтайды (6-сурет).

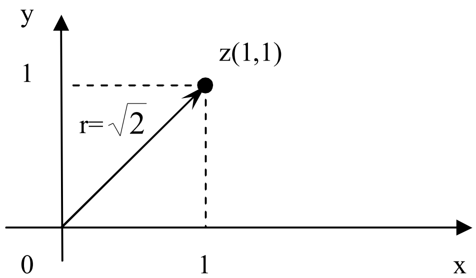


6-сурет

Мысал 12: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_4 = -i$, $z_5 = 4 - 3i$, $z_6 = -1 - i$ комплекс сандарының тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін анықтаңыз.

Шешімі:

1) $z_1 = 1 + i$ саны үшін $x_1 = 1$, $y_1 = 1$. Онда (5) формуласы бойынша $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2}$, z_1 нүктесі (10) формуласының $x > 0$ жағдайына сәйкес келеді (7-сурет). Олай болса



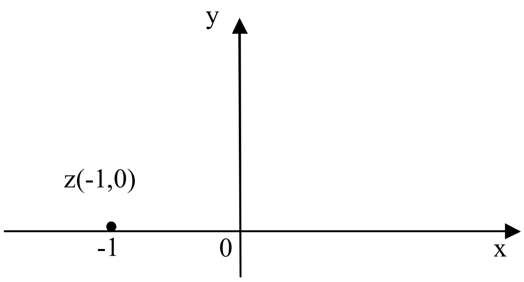
7-сурет

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Демек, тригонометриялық пішіні $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

көрсеткіштік пішіні $z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$ түрлерінде жазылады.

2) $z_2 = -1$ саны үшін $x_2 = -1 < 0$, $y_2 = 0$ болғандықтан, ол (10) формуласының $x < 0, y \geq 0$ жағдайына сәйкес келеді (8-сурет), олай болса $\varphi_2 = \arg z_2 = arctg\ \frac{0}{-1} + \pi = \pi$.



8-сурет

Санның модулі $|z_2| = |-1| = 1$.

Демек, тригонометриялық пішіні

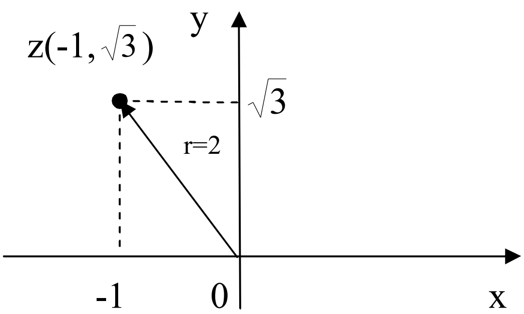
$$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi\ ,$$

көрсеткіштік пішіні

$$z_2 = e^{\pi i}$$

түрлерінде жазылады.

3) $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$ саны үшін $x_3 = -1$, $y_3 = \sqrt{3}$. Демек, (5) формуласы бойынша $|z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2$, ал z_3 нүктесі үшін $x < 0,\ y > 0$ жағдайы орынды (9-сурет) болғандықтан



9-сурет

$$\varphi_3 = \arg z_3 = \operatorname{arctg}\frac{y_3}{x_3} + \pi = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Демек, тригонометриялық пішіні

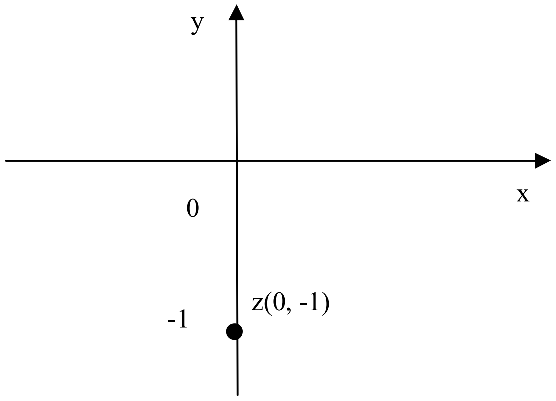
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

көрсеткіштік пішіні

$$z_3 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

түрлерінде жазылады.

4) $z_4 = -i$ нүктесі үшін $x_4 = 0,\ \ y_4 < 0$ жағдайы орынды болғандықтан (10) формуласы бойынша $\varphi = \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$ болады (10-сурет).



10-сурет

$$\varphi_4 = \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}.$$

Санның модулі $|z_4| = |-i| = 1$.

Тригонометриялық пішіні

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

ал көрсеткіштік пішіні

$$z_2 = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

түрлерінде айқындалады.

5) $z_5 = 4 - 3i$ санының модулін табамыз:

$$|z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5,$$

аргументін табатын болсақ:

$x_5 = 4,$ яғни $x > 0$ жағдайы. Олай болса

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}\frac{y_5}{x_5} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-3}{4}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Тригонометриялық пішіні

$$z_5 = 5\left(\cos\left(-arctg\ \frac{3}{4}\right) + i\sin\left(-arctg\ \frac{3}{4}\right)\right),$$

ал көрсеткіштік пішіні

$$z_5 = 5e^{i\left(-arctg\frac{3}{4}\right)}$$

түрлерінде айқындалады.

6) $z_6 = -1 - i$ санының модулі:

$$|z_6| = \sqrt{2},$$

$x_6 = -1,\ \ y_6 = -1$, яғни $x_6 < 0,\ \ y_6 < 0$ жағдайы. Олай болса

$$\arg z_6 = \operatorname{arctg}\frac{y_6}{x_6} - \pi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндері сәйкесінше

$$z_6 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

$$z_6 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

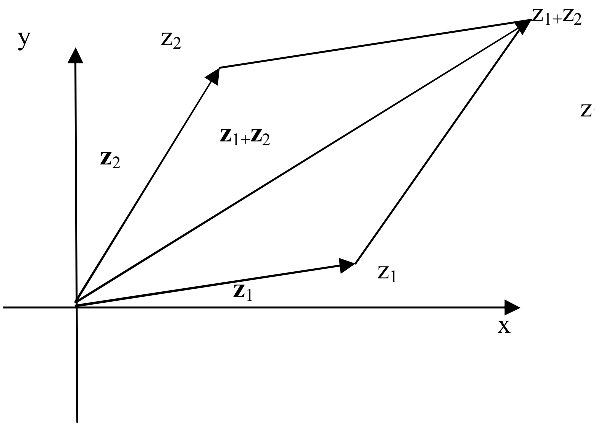
түрлерінде жазылады.

Ескерту: $z = (0,0) = 0$ санының аргументі болмайды.

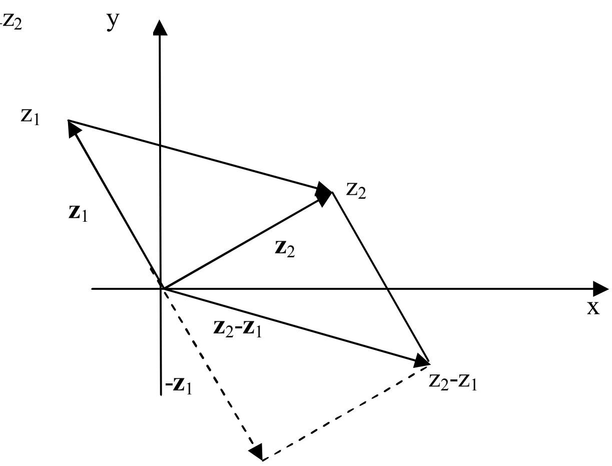
1.4 Комплекс сандарға қолданылатын арифметикалық амалдардың геометриялық мағынасы

Комплекс z_1 мен z_2 сандарының қосындысына геометриялық талдау жасау үшін олардың векторлық кескіндерін қарастырамыз. Сонда z_1+z_2 қосындысына векторларды қосудың параллелограмм ережесі бойынша $\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2$ векторы сәйкес келеді (11-сурет).

Сол сияқты $z_2 - z_1$ санына $\mathbf{z}_2$-$\mathbf{z}_1$ векторы сәйкес келеді (12-сурет).



11-сурет



12-сурет

11 және 12 суреттерінен, үшбұрыштың қабырғасының ұзындығы басқа екі қабырғаларының ұзындықтарының қосындысынан артық емес, ал айырмасының модулінен кем емес екенін ескерсек,

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|,$$

$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

теңсіздіктерін аламыз.

12-суреттен $\mathbf{z}_2$-$\mathbf{z}_1$ векторының ұзындығы z_1, z_2 нүктелерінің ара қашықтығына тең екенін көреміз, олай болса $|z_2 - z_1|$ саны z_1, z_2 сандарының ара қашықтығын береді.

Енді комплекс сандардың көбейтіндісі мен қатынасына тоқталайық.

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

сандарының көбейтіндісін қарастырсақ

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \qquad (11)$$

теңдігін аламыз.

Бұдан мынадай қорытынды шығады:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \qquad (12)$$

яғни екі комплекс санның көбейтіндісінің модулі олардың модульдерінің көбейтіндісіне тең, ал аргументі көбейткіштерінің аргументтерінің қосындысына тең.

(8) теңдігінің негізінде (11) теңдігі көрсеткіштік пішінде

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} \cdot |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

түрінде жазылады.

Комплекс сандардың векторлық кескіндерін қарастырсақ $z_1 z_2$ көбейтіндісінің векторы $\mathbf{z}_1$ векторын $\arg z_2$ бұрышына бұру және $|z_2|$ «есе ұзарту» арқылы алынады деп айта аламыз. Егер $\arg z_2$ оң болса бұру бағыты сағат тіліне қарама-қарсы, ал теріс болса сағат тілімен бағыттас болады. $|z_2| = 1$ болғанда, z_2 санына көбейту $\mathbf{z}_1$ векторын тек бұруға, ал $\arg z_2 = 0$ болғанда тек «ұзартуға» әкеледі.

Мысал үшін i санына көбейтуге 90° –қа бұру, 3 санына көбейтуге 3 есе ұзарту сәйкес келеді.

Жоғарғыдағы (12) теңдіктері комплекс көбейткіштердің кез келген сандарынының $z_1\ z_2 \ldots z_n$ көбейтіндісі жағдайына да таралады:

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2 \ldots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \ldots + \operatorname{Arg} z_n\,. \qquad (13)$$

(13) формулаларынан $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ жағдайында келесі теңдіктер шығады:

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \cdot \operatorname{Arg} z, \qquad (14)$$

Енді z_1, z_2 сандарының қатынасын қарастырсақ ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad (15)$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2, \tag{16}$$

яғни екі комплекс санның қатынасының модулі олардың модульдерінің қатынасына тең, ал осы екі санның қатынасының аргументі бөлінгіш пен бөлгіштің аргументтерінің айырымына тең екендігі шығады.

Сонымен, қатынастың векторы да бөлінгіштің векторын «ұзарту» мен бұру арқылы алынатыны шықты.

(15) теңдігі көрсеткіштік пішінде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

түрінде жазылады.

Мысал 13: 1) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 2) $(1+i)^6(\sqrt{3}+i)^4$; 3) $\dfrac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}+i)^4}$ комплекс сандарының тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін анықтаңыз.

Шешімі:

1) $z_1 = 1 - i$ және $z_2 = 1 + i$ комплекс сандарының модульдері мен аргументтерін тауып алайық:

$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, z_1 саны үшін $x = 1 > 0$, $y = -1 < 0$, олай болса

$\arg z_1 = \varphi_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{(-1)}{1} = -\dfrac{\pi}{4}$.

$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, z_2 саны үшін $x = 1 > 0$, $y = 1 > 0$, олай болса

$\arg z_2 = \varphi_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$.

(15) формуласы бойынша

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Сонымен $\dfrac{1-i}{1+i} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

ал көрсеткіштік пішіні

$$z = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

2) $z = (1+i)^6(\sqrt{3}+i)^4$ санының модулі мен аргументін (13) және (14) формулаларын қолданып табамыз:

$$|z| = \left|(1+i)^6 \cdot (\sqrt{3}+i)^4\right| = \left|(1+i)^6\right| \cdot \left|(\sqrt{3}+i)^4\right| = |1+i|^6 \cdot \left|\sqrt{3}+i\right|^4 = (\sqrt{2})^6 \cdot 2^4 = 2^7;$$

$$\text{Arg } z=\text{Arg }(1+i)^6\left(\sqrt{3}+i\right)^4=\text{Arg}(1+i)^6+\text{Arg}\left(\sqrt{3}+i\right)^4=6\text{Arg}(1+i)+4\text{Arg}\left(\sqrt{3}+i\right)=$$

$$=6\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+4\left(\frac{\pi}{6}+2l\pi\right)=\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+2(6k+4l)\pi=\frac{13\pi}{6}+2(6k+4l)\pi=$$

$$=\frac{\pi}{6}+2(6k+4l+1)\pi,$$

мұндағы $k,l=0,\pm 1,\pm 2,\dots$.

Тригонометриялық пішіні

$$z=2^7\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+2(6k+4l+1)\pi\right)+\text{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+2(6k+4l+1)\pi\right)\right)=2^7\left(\cos\frac{\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

ал көрсеткіштік пішіні

$$z=2^7\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$

3) $z=\dfrac{(1+\text{i})^6}{\left(\sqrt{3}+i\right)^4}$ санының модулі

$$|z|=\left|\frac{z_1^6}{z_2^4}\right|=\left|\frac{(1+\text{i})^6}{\left(\sqrt{3}+i\right)^4}\right|=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^6}{2^4}=\frac{1}{2},$$

аргументі

$$\text{Arg } z=\text{Arg }(1+i)^6-\text{Arg}\left(\sqrt{3}+i\right)^4=6\text{Arg }(1+i)-4\text{Arg}\left(\sqrt{3}+i\right)=6\left(\frac{\pi}{4}+2\text{k}\pi\right)-4\left(\frac{\pi}{6}+2l\pi\right)$$

$$=\frac{5\pi}{6}+2(6k-4l)\pi,\quad k,l=0\pm 1,\pm 2,\dots.$$

Тригонометриялық пішіні

$$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

ал көрсеткіштік пішіні

$$z=\frac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}.$$

Мысал 14: Келесі теңдіктер мен теңсіздіктер арқылы z жазықтығының нүктелерінің қандай жиындары кескінделеді: $|z-z_0|=r$, $|z-z_0|<r$, $|z-z_0|>r$, $r<|z-z_0|<R$, мұндағы $z_0=a_0+ib_0$ - комплекс сан, $r, R\in(0;\infty)$.

Шешімі:

1) $|z-z_0|$ модулі z нүктесінен z_0 нүктесіне дейінгі қашықтық екені жоғарыда айтылған, олай болса $|z-z_0|=r$ теңдігі берілген z_0 нүктесінен r қашықтығында орналасқан барлық z нүктелерінің жиынын анықтайды, яғни центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңберді береді;

2) $|z-z_0|<r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны алдыңғы мысалдағы шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны болады (бұл дөңгелек *ашық дөңгелек* деп аталады);

3) $|z-z_0|>r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны бірінші мысалдағы шеңбердің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны болады;

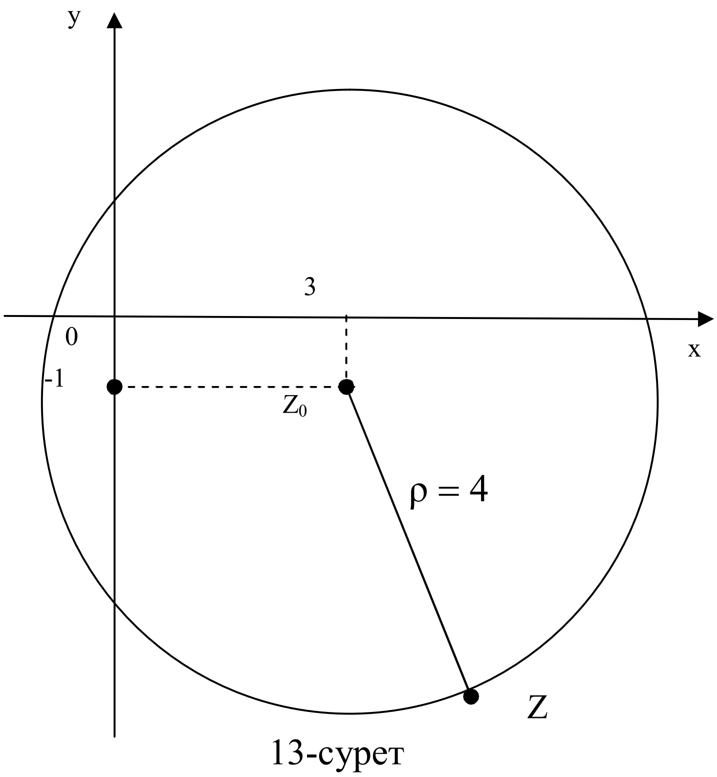
4) $r<|z-z_0|<R$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны $|z-z_0|=r$ және $|z-z_0|=R$ концентрлі шеңберлер арасындағы сақинаны анықтайды.

Мысал 15: Мына шарттармен жазықтықтағы нүктелердің қандай жиындары кескінделеді: 1) $|z-3+i|=4$; 2) $r\le|z|<R$.

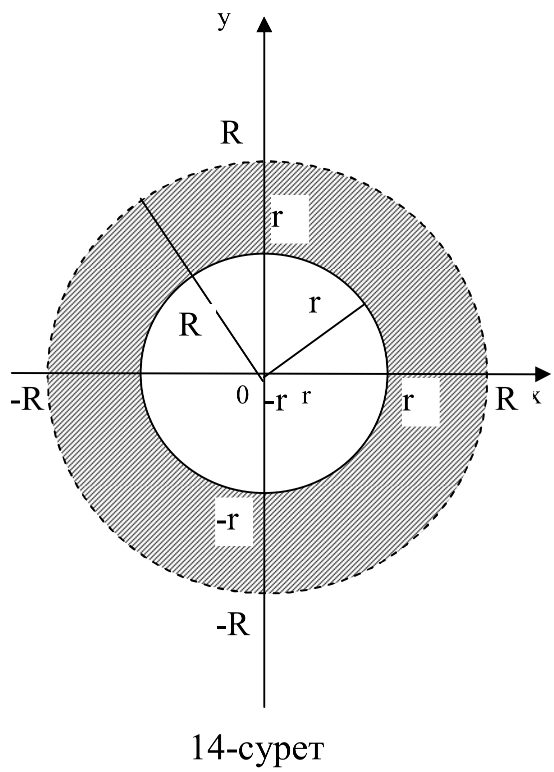
Шешімі:

1) $|z-z_0|=\rho$ теңдігін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны-центрі z_0 нүктесінде, ал радиусы ρ болатын шеңбер. Біздің жағдайда $|z-3+i|=|z-(3-i)|=4$ теңдігі центрі $z_0=3-i$, радиусы $\rho=4$ болатын шеңбер. (13-сурет).

2) $r\le|z|<R$ теңсіздіктер жүйесі центрлері координаталар жүйесінің басында орналасқан, ал радиустары сәйкесінше r және R болатын концентрлі шеңберлермен шектелген, ішкі шеңбер нүктелерін қоса есептегендегі, сақинаны анықтайды (14-сурет).



13-сурет



14-сурет

1.5 Комплекс сандарды дәрежелеу, олардың түбірлерін табу

z - комплекс, n - натурал сандар болсын. z санын n дәрежеге шығару, яғни z^n санын табу есебін қарастырамыз.

Егер z саны $z = x + iy$ алгебралық түрінде жазылса, онда үлкен n натурал сандары үшін $z^n = (x+iy)^n$ дәрежесін табу ұзақ есептеулерді қажет етеді.

Егер біз z санының $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тригонометриялық түріне көшсек

$$z^n = (|z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi))^n$$

теңдігін аламыз. Бұдан (14) теңдіктерінің негізінде *Муаврдың* дәрежелеу есебін шешуді жеңілдететін

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{17}$$

формуласын аламыз.
Көрсеткіштік түрде бұл формула

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} \tag{18}$$

түрінде жазылады.

Мысал 16: $z = -1 + i\sqrt{3}$, z^{60} мәнін есептеңіз.

Шешімі: $z = -1 + i\sqrt{3}$ санын тригонометриялық түрде жазып алайық

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Жоғарғыда берілген (17) формуласын қолдансақ

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{60} = 2^{60}\left(\cos\left(60 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(60 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2^{60}(\cos 40\pi + i\sin 40\pi) = 2^{60}$$

нәтижесіне келеміз.

Анықтама 9. Егер

$$w^n = z$$

теңдігі орынды болса, онда w комплекс саны z комплекс санының *n дәрежелі түбірі* деп аталады *(n=2,3,4,...)*. z санының n дәрежелі түбірі $\sqrt[n]{z}$ түрінде белгіленеді, яғни

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

Мысал үшін $i^2 = -1$ және $(-i)^2 = -1$ болғандықтан, анықтама бойынша, i саны да $(-i)$ саны да (-1) санының 2 дәрежелі түбірі болады. Бұл мысалдан комплекс санның түбірінің көпмәнді болатыны шығады.

Енді $w = \sqrt[n]{z}$ түбірінің барлық мәндерін табу есебін қарастырайық.

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ және $\sqrt[n]{z} = w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ болсын деп ұйғаралық. Онда $w^n = z$ болғандықтан

$$|w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

теңдігі орындалады. Бұл теңдіктен

$$|w|^n = |z|, \ n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

немесе

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ және } \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

болатыны шығады, мұндағы $\sqrt[n]{|z|}$ - $|z|$ нақты санының *n дәрежелі арифметикалық түбірі.*

Сонымен

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,... \qquad (19)$$

формуласын алдық. Бұдан косинус пен синустың 2π - периодты екенін ескерсек,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,...,(n-1) \qquad (20)$$

формуласы шығады. Есептеулерде $\varphi = \arg z$ деп алған қолайлы болады.

Мысал 17: $\sqrt[3]{-64i}$ түбірінің барлық мәндерін табыңыз.

Шешімі: Түбір астындағы $z = -64i$ санының модулі мен аргументін табамыз

$$|z| = \sqrt{0^2 + 64^2} = 64, \qquad \arg\ z = \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

(19) формуласы бойынша

$$\sqrt[3]{-64i} = \sqrt[3]{64\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} = 4\cdot\left(\cos\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi}{3}\right),$$

мұнда $k = 0,1,2$.

$$\sqrt[3]{-64i} = \begin{cases} 4\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i, & \text{егер } k = 0, \\ 4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i, & \text{егер } k = 1, \\ 4\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} - 2i, & \text{егер } k = 2. \end{cases}$$

Сонымен, $\sqrt[3]{-64i}$ түбірінің келесі үш мәнін алдық

$$\left(\sqrt[3]{-64i}\right)_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad \left(\sqrt[3]{-64i}\right)_2 = 4i, \quad \left(\sqrt[3]{-64i}\right)_3 = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Тексеру:

$$\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^3 = -64i, \qquad (4i)^3 = -64i, \qquad \left(2\sqrt{3} + 2i\right)^3 = -64i.$$

Мысал 18: Теңдеулерді шешіңіз:

1) $z^6 + 64 = 0$; 2) $z^2 - 4iz + 12 = 0$.

Шешімі:

1) $z^6 + 64 = 0$

$z^6 = -64$

$z = \sqrt[6]{-64}$

$$z = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right), \qquad z_2 = 2(0+i),$$

$$z_3 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right), \quad z_4 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right),$$

$$z_5 = 2(0-i), \qquad z_6 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

2) $z^2 - 4iz + 12 = 0$

$(z-2i)^2 + 4 + 12 = 0$

$(z-2i)^2 = -16$

$z-2i = \sqrt{-16}$

$z-2i = \sqrt{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right), k = 0, 1.$

$z-2i = 4i$ немесе $z-2i = -4i$

$z_1 = 6i, \quad z_2 = -2i.$

1.6 Есептер

№1. Келесі теңдіктерді дәлелдеңіз:

1) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; 3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; 4) $\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = z_1 + z_2$.

№2. Комплекс сандарды тригонометриялық және көрсеткіштік түрлерінде жазыңыз, комплекс жазықтықта бейнелеңіз:

1) -4;

2) 3;

3) $5i$;

4) $-2i$;

5) $-1+i$;

6) $-2-2i$;

7) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$;

8) $1-i\sqrt{3}$;

9) $(-1-i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$;

10) $(2+2i)(-1+i\sqrt{3})$;

11) $\frac{1-i\sqrt{3}}{-1+i}$;

12) $\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$;

13) $\frac{-\sqrt{3}-i}{-1+i\sqrt{3}}$;

14) $\frac{2-2i}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$;

15) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}$;

16) $\frac{2}{-1+i} - \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\frac{2+2i}{1-i\sqrt{3}}$;

17) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$;

18) $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})$;

19) $\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}+\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.

№3. Теңсіздіктерді шешіп, шешімдер жиынының геометриялық кескінін көрсетіңіз:

1) $\operatorname{Re} z \geq 3$;

2) $\operatorname{Im} z \leq 1$;

3) $\alpha \leq \arg z \leq \beta$;

4) $a \leq \arg z \leq \beta$ және $c \leq \operatorname{Re} z \leq d$ болса;

5) $|z|<2$;

6) $|z| \geq 2$;

7) $\dfrac{1}{|z|} \geq 1,\ z \neq 0$;

8) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leq 2,\ z \neq 0$;

9) $|z-5\mathrm{i}|=8$;

10) $|z-1-\mathrm{i}| \leq 4$;

11) $1<|z+\mathrm{i}|<2;\ \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$;

12) $2<|z| \leq 3;\ \dfrac{\pi}{8}<\arg z \leq \dfrac{4\pi}{3}$;

13) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$;

14) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$;

15) $1 \leq |z+2+\mathrm{i}| \leq 2$;

16) $|z-1|<|z-\mathrm{i}|$;

17) $1<\operatorname{Re} z<2$.

№4. Комплекс сандардың аргументтері мен модульдерін табу керек:

1) $\dfrac{-1}{i}$; 2) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 3) $(1+i\sqrt{3})^3$.

№5. Муавр формуласын қолданып еселі бұрышты функцияларды $\sin\varphi$ және $\cos\varphi$ функциялары арқылы өрнектеңіз:

1) $\sin 2\varphi$; 3) $\sin 3\varphi$; 5) $\sin 4\varphi$; 7) $\sin 5\varphi$;

2) $\cos 2\varphi$; 4) $\cos 3\varphi$; 6) $\cos 4\varphi$; 8) $\cos 5\varphi$.

№6. Теңдеулерді шешіңіз:

1) $z^3+3z^2+3z+3=0$; 2) $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$.

№7. Табу керек:

1) $\sqrt{1-i}$;

2) $\sqrt[3]{1}$;

3) $\sqrt[3]{i}$;

4) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

№8. Түбірлердің мәндерін тауып олардың комплекс жазықтықтағы бейнелерін көрсетіңіз:

1) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$;

2) $\sqrt[4]{-\mathrm{i}}$;

3) $\sqrt[4]{-1}$;

4) $\sqrt{2-2\sqrt{3}\mathrm{i}}$;

5) $\sqrt{\mathrm{i}}$;

6) $\sqrt[4]{1}$;

7) $\sqrt[3]{-1+\mathrm{i}}$;

8) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

№9. Есептеңіз:

1) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5$;

3) $(2-2\,\mathrm{i})^4$;

4) $\left(\dfrac{2-2\mathrm{i}}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}\right)^3$;

5) $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2006}$;

6) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{10}+1}\right)^2$;

7) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{40}$;

8) $(2-2\mathrm{i})^7$;

9) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3$.

10) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

№10 Берілген қосындыларды табу керек.

1) $\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha-...+\cos 99\alpha$;

2) $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha-...+\sin 99\alpha$;

3) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+...+\cos n\alpha$;

4) $\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+...+\cos 100\alpha$;

5) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+...+\sin n\alpha$;

6) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha}+...+\dfrac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha}$;

7) $\sin^4\dfrac{\pi}{32}+\sin^4\dfrac{3\pi}{32}+\sin^4\dfrac{5\pi}{32}+...+\sin^4\dfrac{15\pi}{32}$.

№11. $|z-a|=|z-b|$ теңдеуіне қандай сызық сәйкес келеді?

№12. $|z-a|=k|z-b|,\ k>1$ теңдеуіне қандай сызық сәйкес келеді?

№13. Берілген кесінді белгілі α бұрышымен көрінетін нүктелердің геометриялық орнын табыңыздар.

№14. Берілген теңдеулер қандай сызықты береді?

1) $z=(1+2i)t,\quad t\in(-\infty;+\infty)$;   2) $z=(1+2i)t,\quad t\in(0;+\infty)$.

№15. Егер $t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ болса, онда

1) $z=t+\dfrac{i}{t}$;

2) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$ теңдеулеріне қандай сызықтар сәйкес келеді?

№16. $y=x^2$ параболасының параметрлік теңдеуін комплекстік түрде жазу керек.

2 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

2.1 Негізгі анықтамалар

Функция ұғымын енгізбестен бұрын комплекс сандар жиынына байланысты кейбір қажетті ұғымдарды енгізіп алайық.

z_0 *нүктесінің* ε- *аймағы* деп жазықтықтың $|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерін, яғни центрі z_0 нүктесі, радиусы ε болатын ашық дөңгелекті айтамыз.

z_0 *нүктесінің ойық (тесік)* ε- *аймағы* деп жазықтықтың $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерін, яғни z_0 центрі аласталған $|z - z_0| < \varepsilon$ ашық дөңгелегін айтамыз.

Жиынның ішкі нүктесі деп, осы жиында өзінің қандай да бір аймағымен жататын нүктені айтамыз.

Ашық жиын деп тек ішкі нүктелерден тұратын жиынды айтамыз.

Жиынның шекаралық нүктесі деп кез келген аймағында осы жиынға тиісті де тиіссіз де нүктелер бар болатын нүктені айтамыз.

Жиынның шекарасы деп оның барлық шекаралық нүктелерінің жиынын айтамыз.

Жиынның тұйықталуы деп жиын мен оның шекарасының бірігуін айтамыз. А жиынының тұйықталуы $\overline{A}$ түрінде белгіленеді.

Тұйық жиын деп өзінің тұйықталуына тең жиынды айтамыз.

Матаулы жиын деп кез келген екі нүктесін осы жиында жататын үзіліссіз сызықпен жалғауға болатын жиынды айтамыз.

Облыс деп кез келген матаулы ашық жиынды айтамыз.

Облыс бір матаулы деп аталады, егер оған іштей сызылған кез келген тұйық контур шектейтін жиын облыстың ішкі жиыны болса.

Тұйық облыс деп облыстың тұйықталуын айтамыз, яғни D облыс болса $\overline{D}$ тұйық облыс болады.

Шектелген облыс деп қандай да бір дөңгелекке ішкі жиын болатын облысты айтамыз.

Анықтама 10. Егер белгілі бір f заңы бойынша К жиынының әрбір z комплекс санына бір немесе бірнеше w комплекс саны сәйкестікке қойылса, онда К жиынында анықталған z айнымалысының функциясы f берілген дейміз де, оны

$$w = f(z), \quad z \in K \tag{21}$$

түрінде жазамыз.

K аталған функцияның *анықталу жиыны,* ал $L = \{w : w = f(z), z \in K\}$ *өзгеру жиыны* деп аталады.

Егер әрбір z санына тек бір ғана w саны сәйкестікке қойылса, онда (21) функциясы *бірмәнді*, басқа жағдайда *көпмәнді* деп аталады.

Мысал 19:

1) $w = \frac{2}{z}$ - комплекс жазықтығының z=0 нүктесінен өзге барлық нүктелерінде анықталған бір мәнді функция;

2) $w = 3z - \sqrt{z+4}$ - комплекс жазықтығыда анықталған қос мәнді (көпмәнді) функция, себебі комплекс санның квадрат түбірінің, жалпы, екі мәні болады.

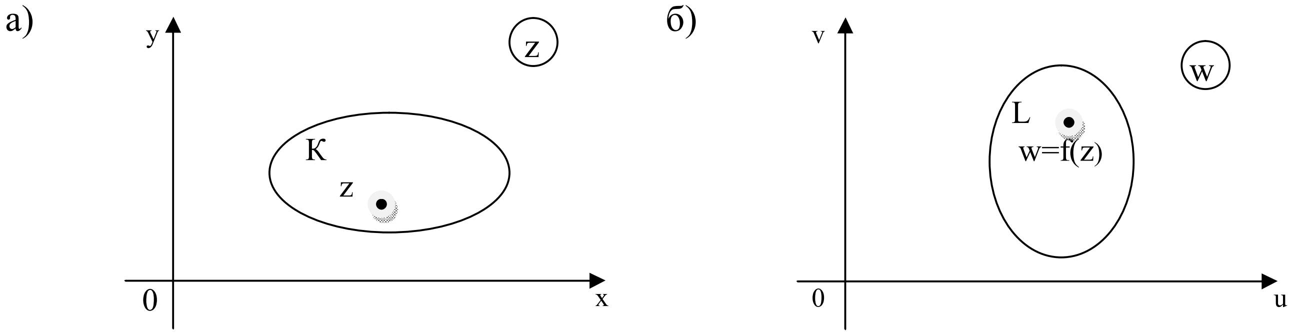
Егер $z = x + iy$, $w = u + iv$ деп ұйғарсақ, онда

$$w = f(z) \Leftrightarrow w = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

теңдігіне келеміз, бұдан

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x,y).$$

K анықталу жиыны z (x0y) жазықтығында, L өзгеру жиыны w (u0v) жазықтығында кескінделеді.



Сурет 15

Егер $w = \mathrm{f(z)}$ болса, онда w берілген z нүктесінің, ал L - K жиынының *бейнесі* деп аталады (Сурет 15а, 15б).

Мысал 20: $w = \mathrm{z}^3 - i\bar{z}$ комплекс айнымалы функциясының нақты және жорамал бөліктерін көрсетіңіз.

Шешімі: $z = x + iy$, $w = u + iv$ екенін ескерсек

$$u + iv = (x+iy)^3 - i(x - iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x)$$

теңдігін аламыз. Олай болса $w = \mathrm{z}^3 - i\bar{z}$ функциясының нақты u және жорамал v бөліктері келесі теңдіктермен анықталады:

$$\mathrm{Re}w = u = x^3 - 3xy^2 - y, \quad \mathrm{Im}w = v = 3x^2y - x - y^3.$$

Мысал 21: $w = \dfrac{1}{z}$ функциясын $w = u + iv$ түрінде жазыңыз.

Шешімі:

$$u + iv = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Сонымен $w = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, мұнда

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Мысал 22: $w = z^2$ функциясы $x = a$ түзуін қандай сызыққа бейнелейді?

Шешімі:

$$u + iv = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

жазылуынан

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

екендігі шығады. Бұдан x=a десек,

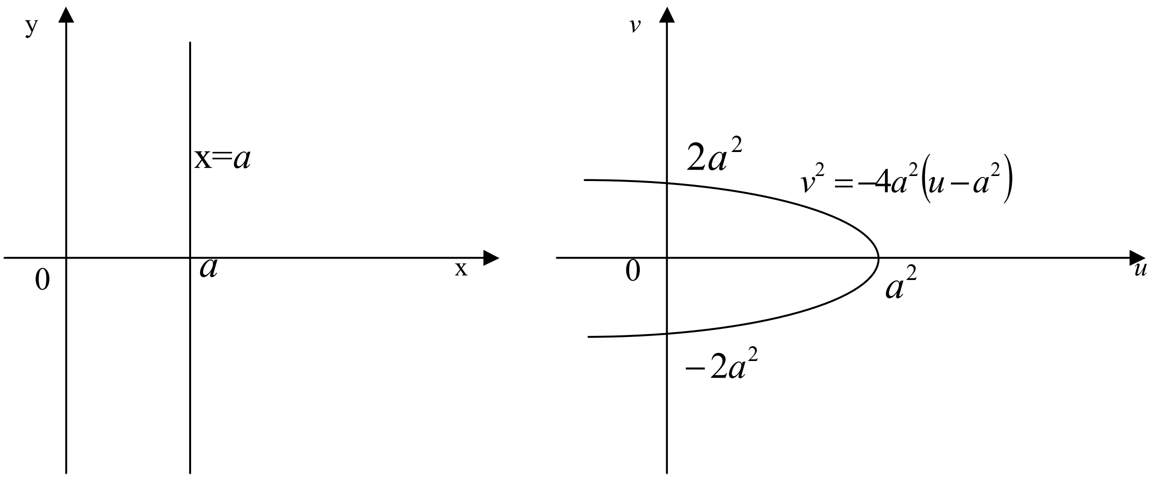
$$u = a^2 - y^2, \quad v = 2ay$$

теңдіктерін аламыз.

Екінші теңдеуден y- тің мәнін тауып бірінші теңдеуге қойсақ

$$v^2 = -4a^2\left(u - a^2\right)$$

түріндегі параболаның теңдеуіне келеміз (Сурет 16).



Сурет 16

Сонымен $w = z^2$ функциясы $x=a$ түзуін $v^2 = -4a^2\left(u - a^2\right)$ параболасына бейнелейді.

2.2 Тізбектер мен функциялар шектері. Үздіксіздік

Бізге $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ комплекс сандар тізбегі берілсін, мұндағы $z_n = f(n)$, $n \in N$ - тізбектің жалпы мүшесі ($f(n)$ - бірмәнді функция), N барлық натурал сандар жиыны.

Анықтама 11. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық *n* нөмірлері үшін

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

теңсіздігі орынды болса, онда z_0 комплекс саны $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ комплекс сандар *тізбегінің шегі* деп аталады.

z_0 санының z_n тізбегінің шегі болуы

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

түрінде белгіленеді.

Мысал 23: $z_n = \dfrac{n-i}{n+i}, \quad n = 1, 2, \dots$ тізбегінің шегі 1 болатынын дәлелдеңіз.

Дәлелдеуі: кез келген $\varepsilon > 0$ саны берілсін. $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін $|z_n - 1| < \varepsilon$ болатындай N нөмірі табылатынын көрсетелік,

$$|z_n - 1| = \left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1+i}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1},$$

онда $|z_n - 1| < \varepsilon$ теңсіздігі $\frac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$, яғни $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$

болғанда орындалады. Демек,

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1\right]$$

деп алсақ, мұндағы $[x]$ - x санынан кіші ең үлкен бүтін сан, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін $|z_n - 1| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Олай болса анықтама бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Комплекс сандардың теңдігінің белгісі бойынша, егер $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ және $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Бұл тұжырымнан, x_n және y_n нақты сандар тізбектері болғандықтан, нақты тізбектердің қасиеттері комплекс сандар тізбектеріне де орынды болады.

Анықтама 12. Егер $\forall\, \mathrm{E} > 0$ $N(\mathrm{E})$ нөмірі табылып $n > \mathrm{N}$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмірлері үшін

$$|z_n| > \mathrm{E}$$

теңсіздігі орынды болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ дейміз.

Бұл жағдайда z_n тізбегін *шексіз алыстағы нүктеге жинақталады* деп айтамыз. Сонымен *шексіз алыстағы нүкте* деп аталатын $z = \infty$ нүктесі енгізілді.

$z = \infty$ нүктесінің аймағы деп $|z| > R \geq 0$ теңсіздігімен анықталатын жиынды, яғни $|z| = R$ шеңберінің сыртын айтамыз.

Комплекс сандар жазықтығын $z = \infty$ шексіз алыстағы нүктесімен толықтырып *комплекс сандардың кеңейтілген жазықтығын* аламыз.

Сонымен комплекс сандар тізбегінің шегі бар болса, онда ол не санға, не шексіздікке тең болады. Бірінші жағдайда *шек тиянақты*, ал *тізбек жинақты* деп аталады.

Енді $W = f(z)$, $z \in K$ функциясының нүктедегі және шексіздіктегі шектері ұғымдарын берейік.

Функцияның нүктедегі шегі.

Анықтама 13.

1) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ саны табылып $0 < |z - z_0| < \delta$ және $z \in K$ шарттарын қанағаттандыратын барлық z үшін

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $W = f(z)$, $z \in K$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы z_0 санына ұмтылғандағы *шегі* деп аталады

Белгіленуі: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$.

2) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ табылып $0 < |z - z_0| < \delta$ және $z \in K$ шарттарын қанағаттандыратын барлық z үшін

$|f(z)| > \varepsilon$

теңсіздігі орындалса, онда $W = f(z),\ z \in K$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы z_0 санына ұмтылғандағы *шегі шексіздікке тең* дейміз.

Белгіленуі: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Функцияның шексіздіктегі шегі.

Анықтама 14.

1) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ табылып $|z| > \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық z үшін

$|f(z) - A| < \varepsilon$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $W = f(z)$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы ∞ - *шексіз алыстағы (*немесе *шексіздіктегі шегі) нүктеге ұмтылғандағы шегі* деп аталады.

Белгіленуі: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$.

2) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ табылып $|z| > \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық z үшін

$|f(z)| > \varepsilon$

теңсіздігі орындалса, онда $W = f(z)$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы ∞ - *шексіз алыстағы нүктеге ұмтылғандағы шегі шексіздікке тең* дейміз.

Белгіленуі: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

Анықтама 15. Егер

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

болса, онда $f(z)$ функциясы $z_0 \in D$ *нүктесінде үздіксіз* деп аталады.

Анықтамадан, функцияның z нүктесінде үздіксіз болуы

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta W = \lim_{\Delta z \to 0} \left(f(z + \Delta z) - f(z)\right) = 0$$

теңдігінің орындалуымен пара-пар екендігі шығады.

Анықтама 16. Егер $W = f(z)$ функциясы D жиынының әрбір нүктесінде үздіксіз болса, онда ол D жиынында *үздіксіз* деп аталады.

Егер $f(z)$ және $\varphi(z)$ функциялары z_0 нүктесінде үздіксіз болса, онда z_0 нүктесінде $(f(z) \pm \varphi(z))$ және $f(z) \cdot \varphi(z)$ функциялары, ал $\varphi(z_0) \neq 0$ болса $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ функциясы да үздіксіз болады.

2.3 Комплекс сандық қатарлар

$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ комплекс сандар тізбегі берілсін, мұндағы

$$z_n = f(n) = x_n + iy_n, \ (x_n, y_n \in R, \quad n \in N)$$

тізбектің жалпы мүшесі.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{22}$$

өрнегін *комплекс сандық қатар* деп атаймыз. (22) қатары

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \ldots + (x_n + iy_n) + \ldots$$

түрінде де жазылады.

Нақты сандар қатарларындағы сияқты

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{n=1}^{n} y_k \tag{23}$$

қосындысы (22) қатарының *n*-ші дербес қосындысы деп аталады.

Анықтама 17. Егер S_n дербес қосындылар тізбегінің

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k + i\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} y_k = S$$

тиянақты шегі бар болса, онда (22) қатары *жинақты қатар* деп, ал S - комплекс саны оның *қосындысы* деп аталады. Егер де $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ немесе S_n тізбегінің шегі жоқ болса, онда (22) қатары *жинақсыз қатар* деп аталады.

Тізбектің шегінің қасиеті бойынша (22) қатары жинақты болу үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots \tag{24}$$

және

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots \tag{25}$$

нақты сандар қатарларының әрқайсысының жинақты болуы қажетті және жеткілікті болатыны шығады. Сондай-ақ, S_1 - (24) қатарының, ал S_2 - (25) қатарының қосындысы болса, онда $S = S_1 + iS_2$ теңдігі орынды болады. Бұдан, мүшелері комплекс сандар болып келетін қатардың жинақтылыққа зерттелінуі мүшелері нақты сандар болатын (24) және (25) қатарларының жинақтылықтарының зерттелінуіне әкелетіні шығады.

Сондықтан нақты сандық қатарларға тән төмендегі ұғымдар мен тұжырымдар комплекс сандық қатарлар теориясында да орынды болады.

Егер (22) қатары жинақты болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Бұл теңдік (22) қатарының жинақтылығының қажетті шарты болады.

Салдар: Егер $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ болса, онда (22) қатары жинақсыз болады.

$$r_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k + i\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k$$

қатары (22) қатарының *қалдығы* деп аталады. Егер (22) қатары жинақты болса, онда $r_n = S - S_n$.

Анықтама 18. Егер (22) қатарының мүшелерінің абсолюттік шамаларынан құрылған қатар, яғни

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots \tag{26}$$

қатары жинақты болса, онда (22) қатары *абсолютті жинақты* деп аталады.

Абсолютті жинақты қатарлар үшін келесі қасиеттер орынды:

1) асолютті жинақты қатар жинақты қатар болады;
2) егер қатар абсолютті жинақты болса, онда оның мүшелерінің орнын ауыстырғаннан қатардың жинақтылығы мен қосындысы өзгермейді;
3) егер қатар абсолютті жинақты болса, онда оның мүшелерін қалай топтасақ та қатардың жинақтылығы мен қосындысы өзгермейді;
4) абсолютті жинақты қатарларды мүшелеп көбейткеннен алынған қатар абсолютті жинақты болады.

(26) қатары оң сандық қатар болғандықтан, комплекс сандық қатардың абсолютті жинақтылығын анықтау үшін оң сандық қатарының жинақтылық белгілерін қолдана аламыз.

1. *Салыстыру белгілері:*

I салыстыру белгісі. Егер $k > N$ үшін $|z_k| \le |w_k|$ теңсіздігі орынды болатындай қандай да бір N саны табылып және $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ қатары жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болады.

II салыстыру белгісі. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|z_k|}{|w_k|}$ шегі нөлден өзгеше сан болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ қатарларының бірінің абсолютті жинақтылығынан екіншісінің де абсолютті жинақтылығы шығады.

2. *Даламбер белгісі.* Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болады.

3. *Кошидің радикалдық белгісі.* Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болады.

2.4 Дәрежелік қатарлар

М жиынында анықталған комплекс аргументті функциялар тізбегі

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

берілсін. Осы функциялар арқылы құрылған

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \qquad (27)$$

қатары *функциялық қатар* деп аталады.

Егер z айнымалысына $z_0 \in M$ тұрақты мәнін берсек (27) функциялық қатарынан

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = f_1(z_0) + f_2(z_0) + \ldots + f_n(z_0) + \ldots$$

сандық қатарын аламыз. Бұл сандық қатар жинақты болса z_0 нүктесі (27) функциялық қатарының *жинақтылық нүктесі* деп аталады да, (27) функциялық қатарын z_0 нүктесінде *жинақты* дейміз. (27) функциялық қатарының барлық жинақтылық нүктелерінің жиынын осы қатардың *жинақтылық облысы* деп атаймыз.

Егер (27) функциялық қатарында $f_n(z)$ функциясын $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$ түріндегі дәрежелік функция деп алсақ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \qquad (28)$$

дәрежелік қатарын аламыз, мұндағы c_n - комплекс сан (қатардың коэффициенті), $z = x + iy$ - комплекс айнымалы, z_0 - берілген комплекс сан.

(28) дәрежелік қатары z_0 нүктесінде жинақты (қосындысы c_0). Олай болса оның жинақтылық облысы құр жиын емес.

Енді (28) дәрежелік қатарының жинақтылық облысын айқындайтын негізгі теоремаға тоқталайық.

Абель теоремасы. Егер (28) дәрежелік қатары қандай да бір $z_1 \neq z_0$ нүктесінде жинақты болса, онда ол $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z нүктесінде (яғни центрі z_0 нүктесі, радиусы $|z_1 - z_0|$ болатын ашық дөңгелекте) абсолютті жинақты болады. Егер (28) дәрежелік қатары қандай да бір z_2 нүктесінде жинақсыз болса, онда ол $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z нүктесінде (яғни центрі z_0 нүктесі, радиусы $|z_2 - z_0|$ болатын тұйық дөңгелектің сыртында) жинақсыз болады.

Абель теоремасынан, егер теоремада аталған z_1 және z_2 нүктелері бар болса, онда (28) қатары $|z - z_0| < R$ дөңгелегінде жинақты, ал оның сыртында жинақсыз болатын R оң саны табылатыны шығады.

R саны (28) қатарының *жинақтылық радиусы*, ал $|z-z_0|<R$ дөңгелегі қатардың *жинақтылық дөңгелегі* деп аталады.

Егер (28) қатары тек z_0 нүктесінде жинақты болса $R = 0$, ал кез келген нүктеде жинақты болса $R = \infty$ деп аламыз.

(28) қатарының жинақтылық радиусын

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad (29)$$

немесе

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (30)$$

формулаларымен табуға болады.

Мысал 24: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ қатарының жинақтылық радиусын табыңыз.

Шешімі: Мұнда $c_n = (1+i)^n, \quad z_0 = 0$. c_n коэффициентінің модулі

$$|c_n| = \left|(1+i)^n\right| = |1+i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{n/2}.$$

Жинақтылық радиусын (30) формуласы бойынша табамыз:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Мысал 25: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(n+1)2^n}$ қатарының жинақтылық дөңгелегін табыңыз.

Шешімі: Берілген қатарды (28) түрінде жазып аламыз:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}(z-i)^n.$$

Бұдан $c_n = \frac{1}{(n+1)2^n}, \quad z_0 = i$ екендігі шығады. Енді (29) формуласы бойынша жинақтылық радиусын табамыз:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)}\right| = 2.$$

Жинақтылық дөңгелегі деп $|z - z_0| < R$ дөңгелегін атағамыз, демек, берілген қатардың жинақтылық дөңгелегі $|z-i| < 2$ дөңгелегі болады.

Мысал 26: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: Мұнда $c_n = \frac{1}{n!}, \quad z_0 = 0,$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

Демек қатардың жинақтылық облысы барлық комплекс сандар жазықтығы болады.

2.5 Комплекс айнымалы элементар функциялар

Математикалық анализ курсында кез келген нақты x үшін

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

теңдіктерінің орынды болатыны көрсетілген.

Осы тұрғыдан комплекс айнымалы e^z көрсеткіштік және $\sin z$, $\cos z$ тригонометриялық функцияларын да сәйкес дәрежелік қатарлардың қосындысы ретінде анықтаймыз:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots;$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Берілген қатарлар z-тің кез келген мәнінде абсолютті жинақты болады, яғни берілген функциялар бүкіл комплекс жазықтығында анықталған.

Бұл анықтамалардан, қатарлар абсолютті жинақты болғандықтан, комплекс $z=x+iy$ айнымалы аталған функциялардың келесі пара-пар анықтамалары шығады:

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y);$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Мысалы 27: Есептеңіз: $e^{3+\frac{\pi}{2}\cdot i}$

Шешімі: $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ формуласы бойынша

$$e^{3+\frac{\pi}{2}\cdot i}=e^3\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}=e^3\cdot\left(\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}+i\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}\right)=e^3(0+i)=e^3 i.$$

Мысал 28: Есептеңіз: $\sin(5-i)$.

Шешімі: Анықтама бойынша

$$\sin z=\frac{e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}}{2i},$$

онда

$$\sin(5-i)=\frac{e^{i\cdot(5-i)}-e^{-i\cdot(5-i)}}{2i}=i\frac{e^{1+5i}-e^{-1-5i}}{2i\cdot i}=-\frac{i}{2}\left(e(\cos 5+i\cdot\sin 5)-e^{-1}(\cos 5-i\cdot\sin 5)\right)=$$

$$=-\frac{i}{2}\cdot\left(\cos5\cdot\left(e-e^{-1}\right)+i\cdot\sin5\cdot\left(e+e^{-1}\right)\right)=-i\cdot\cos5\cdot\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)+\sin5\cdot\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)=$$

$$=\sin5\cdot\mathrm{ch}1-i\cdot\cos5\cdot\mathrm{sh}1.$$

e^z көрсеткішті функциясы төмендегі қасиеттерге ие:

1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, мұндағы z_1, z_2 – кез келген комплекс сандар;

2) $e^{z+2\pi ki}=e^z$, $k=0,1,\ldots$, яғни e^z - $2\pi i$- периодты функция.

Тригонометриялық $\sin z$ және $\cos z$ функциялары 2π - периодты.

$\mathrm{tg} z$ және $\mathrm{ctg} z$ функциялары келесі теңдіктермен анықталады:

$$\mathrm{tg}\, z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}}{i\cdot\left(e^{i\cdot z}+e^{-i\cdot z}\right)};\quad z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots;$$

$$\mathrm{ctg}\, z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{i\cdot\left(e^{i\cdot z}+e^{-i\cdot z}\right)}{\left(e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}\right)};\quad z\neq k\pi\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

$\mathrm{tg} z$, $\mathrm{ctg} z$ - π - периодты функциялар.

Гиперболалық $\mathrm{sh} z$, $\mathrm{ch} z$, $\mathrm{th} z$, $\mathrm{cth} z$ **функциялары** келесі теңдіктермен анықталады:

$$\mathrm{sh}\, z=\frac{e^z-e^{-z}}{2};\qquad \mathrm{th}\, z=\frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}};$$

$$\mathrm{ch}\, z=\frac{e^z+e^{-z}}{2};\qquad \mathrm{cth}\, z=\frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}.$$

Гиперболалық және тригонометриялық функциялар үшін келесі тепе-теңдіктер орынды болады:

$\sin(i z)=i\,\mathrm{sh}\, z$; $\mathrm{sh}(iz)=i\sin z$;

$\cos(i z)=\mathrm{ch}\, z$; $\mathrm{ch}(iz)=\cos z$;

$\mathrm{tg}(i z)=i\,\mathrm{th}\, z$; $\mathrm{th}(i z)=i\,\mathrm{tg}\, z$;

$\mathrm{ctg}(i z)=-i\,\mathrm{cth}\, z$; $\mathrm{cth}(i z)=-i\,\mathrm{ctg}\, z$.

Бұл тепе-теңдіктерден $\mathrm{sh}\, z, \mathrm{ch}\, z$ функцияларының $2\pi i$ - периодты, ал $\mathrm{th}\, z$, $\mathrm{cth}\, z$ функцияларың πi - периодты екендігі шығады.

Комплекс айнымалы **логарифмдік функция** көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады:

$$\mathrm{Ln} z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\ \ k=0;\pm1;\pm2;\ldots,\ \ z\neq0.$$

Функцияның $k=0$ жағдайына сәйкес мәні оның бас мәні деп аталып

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

түрінде белгіленеді.

Комплекс айнымалы логарифмдік функцияның қасиеттері:

$$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\, z_1+\mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2,\quad z_1\neq 0,\ z_2\neq 0;$$

$$\mathrm{Ln}\,(z)^n=n\mathrm{Ln}\ z+2\pi ki,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\quad \mathrm{Ln}\left(\sqrt[n]{z}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z.$$

Мысал 29: Есептеңіз: $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

Шешімі: Анықтама бойынша

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\cdot(\arg z+2k\pi),\quad k=0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

Бізде

$$z=\sqrt{3}-i,\ |z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2,\ \arg z=\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

Олай болса

$$\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)=\ln 2+i\cdot\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right),\ k=0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

Мысал 30: $w=\sin z$ функциясының $z=\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ нүктесіндегі модулін табыңыз.

Шешімі: $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ формуласында $z=\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ деп алсақ

$$\left|\sin\left[\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]\right|=\left|\frac{e^{i\left[\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]}-e^{-i\left[\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]}}{2i}\right|=\frac{\left|e^{i\pi}e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}-e^{-i\pi}e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}\right|}{|2i|}=$$

$$=\frac{\left|e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}-e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}\right|}{2}=\frac{2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}{2}=2.$$

Бұл мысалдан $\sin z$ тригонометриялық функциясының модулінің комплекс жазықтықта бірден үлкен мәнге ие бола алатынын көреміз.

Ескерту: Комплекс айнымалы $\sin z$ функциясы модулі бойынша шектелмеген функция.

Кері тригонометриялық $\mathrm{Arcsin}\ z$, $\mathrm{Arccos}\ z$, $\mathrm{Arctg}\ z$, $\mathrm{Arcctg}\ z$, $\mathrm{Arsh}\ z$, $\mathrm{Arch}\ z$, $\mathrm{Arth}\ z$, $\mathrm{Arcth}\ z$ **функциялары** $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg}\ z$, $\mathrm{ctg}\ z$, $\mathrm{sh}\ z$, $\mathrm{ch}\ z$, $\mathrm{th}\ z$, $\mathrm{cth}\ z$ функцияларына сәйкес кері функциялар ретінде анықталады. Мысалы, егер z=cosw болса, онда онда w берілген z санының арккосинусы делініп, w=Arccosz түрінде белгіленеді. Бұл функциялардың барлығы да көп мәнді болып келеді және логарифмдік функция арқылы анықталады:

$$\mathrm{Arcsin}\,z=-i\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right);\qquad \mathrm{Arsh}\,z=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right);$$

$$\mathrm{Arccos}\,z=-i\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);\qquad \mathrm{Arch}\,z=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\mathrm{Arctg}\ z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right);\qquad \mathrm{Arth}\ z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\ z\neq 1;$$

$$\mathrm{Arcctgz}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right); \qquad \mathrm{Arcthz}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\ z\neq 1.$$

Бұл кері тригонометриялық функциялардың логарифмнің бас мәніне сәйкес келетін мәндері *бас мәндер* деп аталып сәйкесінше: arcsinz, arccosz, arctgz, arcctgz, arcshz, arcchz, arcthz, arccthz түрінде белгіленеді.

Мысалы: arcsinz=ln(iz+ $\sqrt{1-z^2}$) – Arcsinz функциясының бас мәні болады.

Мысал 31: $Arc\sin\frac{\pi}{3}i$ комплекс санын алгебралық түрде жазыңыз.

Шешімі: $Arc\sin z=-i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$ формуласында $z=\frac{\pi}{3}i$ деп аламыз, онда

$$Arc\sin\frac{\pi}{3}i=-iLn\left(-\frac{\pi}{3}\pm\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right),$$

бұдан

$$Arc\sin\frac{\pi}{3}i=-iLn\left[-\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)\right]=-i\left[\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)+\pi i+2k\pi i\right]=$$

$$=(2k+1)\pi-i\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right),\quad (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

немесе

$$Arc\sin\frac{\pi}{3}i=-iLn\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)=-i\left[\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi i\right]=$$

$$=2k\pi-i\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right),\quad (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

болатыны шығады.

Мысал 32: Есептеңіз: $\mathrm{Arcsin}\sqrt{3}\,i$.

Шешімі: Анықтама бойынша

$$\mathrm{Arcsin}\ z=-i\cdot\mathrm{Ln}\left(i\cdot z+\sqrt{1-z^2}\right)$$

Бізде $z=\sqrt{3}i$, олай болса

$$\mathrm{Arcsin}\sqrt{3}i=-i\cdot\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}i^2+\sqrt{1-(\sqrt{3}i)^2}\right)=-i\cdot\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}\pm2\right)=-i\left(\ln\left|-\sqrt{3}\pm2\right|+i\left(\arg\left(-\sqrt{3}\pm2\right)+2k\pi\right)\right)=$$

$$=-i\cdot\left(\ln\left|-\sqrt{3}\pm2\right|+i\pi+i2k\pi\right),\qquad k=0;\pm1;\pm2;\ldots$$

немесе

$$Arc\sin\sqrt{3}i=(2k+1)\pi-i\cdot\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\ \text{және}$$

$$Arc\sin\sqrt{3}i=(2k+1)\pi-i\cdot\ln\left(2+\sqrt{3}\right),\qquad k=0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

Мысал 33: $\sin z=3$ теңдеуін шешіңіз.

Шешімі: есеп $z = Arc\sin 3$ шамасын табуға келеді.

$\mathrm{Arcsin\ z} = -\mathrm{iLn}\left(\mathrm{iz} + \sqrt{1 - \mathrm{z}^2}\right)$ формуласын қолдансақ

$$\mathrm{Arcsin3} = -\mathrm{iLn}\left(\mathrm{i3} + \sqrt{1 - 3^2}\right),$$

демек,

$$\mathrm{z} = \mathrm{Arcsin3} = -\mathrm{iLn}\left(3\mathrm{i} + \sqrt{-8}\right).$$

Бұдан $\sqrt{-8} = \pm\sqrt{8}i$ екенін ескерсек

$$z = -i\left[Ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right)i\right],$$

$Ln\left(3 \pm \sqrt{8}i\right)$ мәндерін $\mathrm{L}nz = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

формуласы бойынша табамыз:

$$\arg\left[\left(3 \pm \sqrt{8}\right)i\right] = \frac{\pi}{2}; \qquad \left|\left(3 \pm \sqrt{8}\right)i\right| = 3 \pm \sqrt{8}\ ;$$

$$\mathrm{L}n\left[\left(3 \pm \sqrt{8}\right)i\right] = \ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Олай болса

$$\mathrm{z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Мысал 34: $\mathrm{W} = \mathrm{Arcth\ z}$ және $\mathrm{W} = \mathrm{Arccos\ z}$ функцияларын логарифмдік түрде жазайық.

Шешімі:

1) $$\mathrm{w} = \mathrm{Arcth\ z} \Rightarrow \mathrm{z} = \mathrm{cth\ w} = \frac{\mathrm{Ch}\ w}{\mathrm{Sh\ w}} = \frac{\mathrm{e^w} + \mathrm{e^{-w}}}{\mathrm{e^w} - \mathrm{e^{-w}}} = \frac{\mathrm{e^{2w}} + 1}{\mathrm{e^{2w}} - 1} \Rightarrow$$

$$\left(\mathrm{e^{2w}} - 1\right) \cdot \mathrm{z} = \mathrm{e^{2w}} + 1 \Rightarrow \mathrm{e^{2w}}(\mathrm{z} - 1) = \mathrm{z} + 1 \Rightarrow \mathrm{e^{2w}} = \frac{\mathrm{z} + 1}{\mathrm{z} - 1} \Rightarrow 2\mathrm{w} = \mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{z} + 1}{\mathrm{z} - 1}\right),$$

$$\mathrm{w} = \mathrm{Arcth\ z} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{z} + 1}{\mathrm{z} - 1}\right), \quad \mathrm{z} \neq 1.$$

2) $$\mathrm{w} = \mathrm{Arccos\ z} \Rightarrow \mathrm{z} = \cos\mathrm{w} = \frac{\mathrm{e^{i \cdot w}} + \mathrm{e^{-i \cdot w}}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2\mathrm{z} \cdot \mathrm{e^{iw}} + 1 = 0.$$

Осы $\mathrm{e^{iw}}$ шамасына қатысты квадраттық теңдеуді шешіп алып, w функциясын логарифмдік түрде жазамыз:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \mathrm{z} + \sqrt{\mathrm{z}^2 - 1} \Rightarrow \mathrm{i}w = \mathrm{Ln}\left(\mathrm{z} + \sqrt{\mathrm{z}^2 - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{Arccos\ z} = \mathrm{w} = -\mathrm{iLn}\left(\mathrm{z} + \sqrt{\mathrm{z}^2 - 1}\right).$$

Дәрежелік $\mathrm{W} = \mathrm{z^a}$ (a - кез келген комплекс сан) *функциясы* келесі қатынаспен анықталады

$$\mathrm{z^a} = \mathrm{e^{aLnz}}, \quad \mathrm{z} \neq 0.$$

Lnz көпмәнді болғандықтан $\mathrm{z^a}$ функциясы көпмәнді, ал

$z^a = e^{a\cdot\ln z}$ - оның бас мәні деп аталады.

Көрсеткіштік $W = a^z$ *функциясы,* мұндағы a – нөлден өзгеше комплекс тұрақты,

$$a^z = e^{z\cdot\mathrm{Ln}\, a}$$

теңдігімен анықталады. Бұл функцияның бас мәні $e^{z\cdot\ln a}$ болады.

$$a^{z_1}\cdot a^{z_2} \neq a^{z_1+z_2}, \qquad \left(a^{z_1}\right)^{z_2} \neq a^{z_1\cdot z_2}.$$

Мысал 35: Есептеңіз: $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2i}$.

Шешімі: Анықтама бойынша

$$a^z = e^{z\cdot\mathrm{Ln}\, a}.$$

Бізде

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2i} = e^{2i\cdot\mathrm{Ln}\left(1-\sqrt{3}i\right)};$$

$$\mathrm{Ln}\left(1-\sqrt{3}i\right) = \ln 2 + i\cdot\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\ \ k=0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

Олай болса

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2i} = e^{2i\cdot\left(\ln 2 + i\cdot\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right)} = e^{2\ln 2\cdot i - 2\cdot\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)} = e^{\frac{2\pi}{3}+4k\pi + i\cdot 2\ln 2} =$$

$$= e^{\frac{2\pi}{3}+4k\pi}\cdot\left(\cos\left(\ln 4\right)+i\cdot\sin\left(\ln 4\right)\right),\qquad k=0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

2.6 Есептер

№1. Келесі функциялардың нақты және жорамал бөліктерін табыңыз.

1) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$;

2) $w=\dfrac{z+1}{z-1}$;

3) $w=\bar{z}^2+|z|^2$;

4) $w=e^{i\alpha}z+e^{i\beta}\bar{z};\quad (\alpha,\beta\in R)$;

5) $w=z^2-\dfrac{1}{z^2}$;

6) $w=\bar{z}-iz^2$;

7) $w=z^2+i$;

8) $w=i-z^3$;

9) $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$;

10) $w=\dfrac{iz+1}{1+\bar{z}}$;

11) $w=\dfrac{1}{z}$;

12) $w=z^2+az+b;\quad (a,b\in R)$;

13) $w=2z-1$;

14) $w=z+z^2$;

15) $w=\sin z$;

16) $w=ch(z-i)$;

17) $w=2^{z^2}$;

18) $w=shz$;

19) $w=z^{-1}$;

20) $w=e^{-z}$;

21) $w=\dfrac{\bar{z}}{z}$; 23) $w=e^{\bar{z}^{-2}}$;

22) $w=z^3$; 24) $w=tgz$.

№2. Келесі функцияларды z=x+iy айнымалысының функциясы ретінде жазу керек.

1) $w=\dfrac{y-ix}{x^2+y^2}$; 4) $w=\dfrac{x(ix-1)+iy(y+1)}{x^2+y^2}$;

2) $w=y^3-3x^2y+y+i(x^3-3xy^2-x)$; 5) $w=\dfrac{x^2+y^2+8x+15}{x^2+y^2+10x+25}+\dfrac{i2y}{x^2+y^2+10x+25}$.

3) $w=\dfrac{x^2+y^2+x+i(x^2+y^2-y)}{x^2+y^2}$;

№3. Анықтаманы пайдаланып, берілген (z_n) тізбегінің шегі көрсетілген c саны болатындығын дәлелдеу керек.

1) $z_n=\dfrac{(2i)^n-1}{(2i)^n}$, c=1; 3) $z_n=\dfrac{3in-n-1}{1+ni}$, c=3+i; 5) $z_n=\dfrac{in^3+3}{2n^3-i}$, $c=\dfrac{i}{2}$;

2) $z_n=\dfrac{in^2+2n^2+1}{n^2+i}$, c=2+i; 4) $z_n=\dfrac{n+2i}{n-3i}$, c=1; 6) $z_n=\dfrac{n^2+3i}{n^2-2i}$, c=1.

№4. Тізбектердің шегін табу керек:

1) $\lim\limits_{z\to 1-i}\bar{z}$; 4) $\lim\limits_{z\to -2+3i} z$; 7) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z-2i}$;

2) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2}{z-i}$; 5) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z-2i}{z+i}$; 8) $\lim\limits_{z\to -i}\arg z$.

3) $\lim\limits_{z\to -1+i}\dfrac{z}{z+1}$; 6) $\lim\limits_{z\to i}\left[3x^2-y+i(x+3y)\right]$;

№5. Дәлелдеу керек:

1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}}{z}$ шегінің жоқ екенін; 2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{\bar{z}}=0$.

№6. $f(z)=\dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{\operatorname{Im} z}$ функциясының z=0 нүктесінде шегі бар ма?

№7. Келесі функциялар $z=i$ нүктесінде үздіксіз бе?

1) $\dfrac{z+1}{z+i}$; 3) $\dfrac{x-y}{x+y}$; 5) $\dfrac{z-i}{z}$;

2) $\dfrac{x-iy}{x-y+1}$; 4) $\dfrac{z+4}{\operatorname{Im} z-1}$; 6) $\dfrac{z}{z^2+1}$.

№8. Келесі функциялардың үзіліс нүктелерін табыңыз.

1) $\dfrac{z}{z^2-z-2}$; 2) $\dfrac{z-1}{z^2-4}$; 3) $\dfrac{1}{z^3+i}$.

№9. Функциялардың комплекс жазықтықтың әрбір нүктесінде үздіксіз екендігін дәлелдеу керек.

1) $f(z)=\bar{z}^2$; 2) $f(z)=|z|^2 z$.

№10. Комплекс сандарды алгебралық түрде жазыңыз:

1) $\sin(\pi i)$; 14) $\sin(x+iy)$;
2) $\cos(\pi i)$; 15) $\cos(x+iy)$;
3) $tg\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)$; 16) $(-1)^{\sqrt{2}}$;
4) $ctg(\pi i)$; 17) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$;
5) $sh\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)$; 18) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$;
6) $th(\pi i)$; 19) i^i;
7) $cos\,i$; 20) $i^{\frac{1}{i}}$;
8) $\sin i$; 21) 1^i;
9) $\cos(1+i)$; 22) $Arc\sin\dfrac{\pi}{3}i$;
10) $tg(2-i)$; 23) $Arctg(1+i)$;
11) $ctg(1-\sqrt{3}i)$; 24) $Arc\sin\ i$;
12) $ch\ i$; 25) $Arc\cos\ i$;
13) $sh(-2+i)$; 26) $Arctg\ i$.

№11. Келесі сандардың логарифмдерін табыңыз:

1) e; 3) $3-2i$; 5) $-1-i$;
2) i; 4) $-i$; 6) i^i.

№12. Теңдеулерді шешіңіз:

1) $\ln(z+i)=0$; 5) $\sin z=3$; 9) $\ln(i-z)=1$;
2) $e^{-z}+1=0$; 6) $e^z+i=0$; 10) $e^{2z}+2e^z-3=0$;

3) $4\cos z + 5 = 0$; 7) $ch\ z = i$; 11) $e^{ix} = \cos\pi x$, (x - нақты сан).

4) $\sin z = \pi i$; 8) $shiz = -i$;

№13. Тепе–теңдікті дәлелдеңіз:

1) $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 z + sh^2 y}$;

2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;

3) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;

4) $ch\,2z = ch^2 z + sh^2 z$;

5) $\sin\ z = -i\,sh\ i\,z$;

6) $\cos\ z = ch\ i\,z$;

7) $tg\,z = -i\,th\ i\,z$;

8) $ch^2 z - sh^2 z = 1$;

9) $\sin\ 2z = 2\sin\ z \cdot \cos\ z$;

10) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

11) $\sin i\,z = i\,sh\,z$;

12) $\cos i\,z = ch\ z$;

13) $tg\ i\,z = i\,th\,z$.

№14. Функцияларды аналитикалық түрде өрнектеңіз:

1) Arcsin z ;

2) Arctg z ;

3) Arcctg z ;

4) Arsh z ;

5) Arch z ;

6) Arth z ;

7) Arcth z .

3 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАУ

3.1 Туынды ұғымы

D **облысында анықталған** $W = f(z)$ **бірмәнді функциясы берілсін.**

Анықтама 19. $W = f(z)$ бірмәнді функциясының *D* жиынына тиісті *z* *нүктесіндегі туындысы* деп

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

тиянақты шегін айтамыз. $f(z)$ функциясының z нүктесіндегі туындысы $f'(z)$ немесе $\frac{d\,f(z)}{dz}$ түрлерінде белгіленеді:

$$f'(z)=\frac{d\,f(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{31}$$

z нүктесінде туындысы бар $f(z)$ функциясы осы нүктеде *дифференциалданатын* функция деп аталады.

$$f(z) = U(x;y) + i\cdot V(x;y)$$

түрінде берілген $f(z)$ функциясы үшін (31) теңдігі

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta U + i\cdot\Delta V}{\Delta x + i\cdot \Delta y} \tag{32}$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$\Delta U = U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x,y), \qquad \Delta V = V(x+\Delta x, y+\Delta y) - V(x,y).$$

(32) теңдігінен, егер $f(z) = U(x;y) + i\cdot V(x;y)$ дифференциалданатын функция болса, онда U және V функцияларының

$$\frac{\partial U(x;y)}{\partial x}=\frac{\partial V(x;y)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial U(x;y)}{\partial y}=-\frac{\partial V(x;y)}{\partial x} \tag{33}$$

теңдіктерін қанағаттандыратыны шығады. Бұл теңдіктер *Коши-Риман шарттары* деп аталады. Коши-Риман шарттары $f(z) = U(x;y) + i\cdot V(x;y)$ функциясының дифференциалдануының қажетті шарттары болады.

Егер U(x,y) және V(x,y) функциялары (x,y) нүктесінде Коши-Риман шарттарын қанағаттандыруларымен қатар дифференциалданатын функциялар болса, онда $f(z) = U(x;y) + i\cdot V(x;y)$ функциясы z=x+iy нүктесінде дифференциалданатын функция болады.

Сонымен қатар (32) теңдігі мен (33) Коши-Риман шарттарынан туынды табудың келесі формулаларын аламыз:

$$f'(z)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}-i\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}+i\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{34}$$

Мысал 36: $W = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі: Берілген функцияның нақты бөлігі $U = x^3 - 3xy^2$ функциясы мен жорамал бөлігі $V = 3x^2y - y^3$ фунциясының дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2-3y^2,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-6xy,\qquad \frac{\partial V}{\partial x}=6xy,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=3x^2-3y^2.$$

Дербес туындылардың кез келген (x,y) нүктесінде үзіліссіз және U(x,y), V(x,y) Коши-Риман шарттарын қанағаттандыратынын көреміз, олай болса, $W=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)$ функциясы кез келген нүктеде дифференциалданатын функция. (34) формуласы бойынша

$$f'(z)=w'=\frac{\partial U}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=3x^2-3y^2+i6xy.$$

Мысал 37: $W=z^2$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі: $W=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xy$, яғни $U=x^2-y^2$, $V=2xy$ болғандықтан

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-2y,\qquad \frac{\partial V}{\partial x}=2y,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=2x.$$

Дербес туындылар үзіліссіз және олар Коши-Риман шарттарын қанағаттандырады. (34) формуласы бойынша

$$w'=\frac{\partial U}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=2x+i2y=2(x+iy)=2z.$$

Сонымен $w'=\left(z^2\right)'=2z.$

Осы жолмен

$$w'=\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$$

теңдігінің орынды болатынын көрсетуге болады.

(r,φ) полярлық координаталарында (33) *Коши–Риман шарттары* мен (34) формуласы сәйкесінше төмендегі түрлерде жазылады:

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi},\qquad \frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

$$f'(z)=\frac{r}{z}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial r}+i\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}-i\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right).\qquad(35)$$

Мысал 38: $W=\ln z$ функциясының бүкіл комплекс жазықтықтың $z=0$ нүктесінен басқа нүктелерінде дифференциалданатынын көрсетіп және оның туындысын табыңыз.

Шешімі: Функцияның нақты және жорамал бөліктерін (r,φ) полярлық координаталарында жазып аламыз. Анықтама бойынша

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\varphi=\ln r+i\varphi,$$

мұндағы $r=|z|,\quad \varphi=\arg z.$

Сонымен функцияның нақты бөлігі $U=\ln r$, жорамал бөлігі $V=\varphi$. Дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r},\qquad \frac{\partial V}{\partial\varphi}=1,\qquad \frac{\partial U}{\partial\varphi}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial r}=0.$$

Дербес туындылар $r\neq 0$ (яғни $z\neq 0$) жиынында үзіліссіз және полярлық координаталарда берілген

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

Коши-Риман шарттарын қанағаттандырады, олай болса $W=\ln z$ функциясы $r\neq 0$ (яғни $z\neq 0$) жиынында дифференциалданады. Онда (35) формуласы бойынша

$$(\ln z)'=\frac{r}{z}\cdot\left(\frac{1}{r}+i\cdot 0\right)=\frac{1}{z}\Rightarrow(\ln z)'=\frac{1}{z}, \qquad z\neq 0.$$

Комплекс айнымалы функциялар үшін нақты аргументті функциялар теориясындағы дифференциалдау ережелері толығымен сақталады:

1. $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$;
2. $[f(z)\cdot g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$;
3. $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$;
4. $\frac{df[g(z)]}{dz}=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dz}$.

Егер f(z) функциясы z_0 нүктесінің қандайда бір аймағында дифференциалданатын болса, онда ол z_0 нүктесінде *аналитикалық* немесе *голоморфты* деп аталады.

Комплекс сандар жазықтығының f(z) бірмәнді функциясы аналитикалық болатын нүктелері осы функцияның *дұрыс нүктелері*, ал аналитикалық болмайтын нүктелері сол функцияның *айрықша (ерекше) нүктелері* деп аталады.

Анықтама 20. Егер екінші ретке дейінгі дербес туындылары D облысында үзіліссіз болатын және осы облыста *Лаплас теңдігі деп* аталатын

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

теңдігін қанағаттандыратын U(x;y) нақты функциясы D облысында *гармониялық* деп аталады.

Коши-Риман шартынан аналитикалық функцияның нақты және жорамал бөліктерінің *гармониялық функциялар* болатыны шығады.

Бірақ U(x,y) және V(x,y) функцияларының гармониялық болуларынан $f(z)=U(x;y)+i\cdot V(x;y)$ функиясының аналитикалық болуы шыға бермейді: $f(z)$ аналитикалық болуы үшін U(x,y) және V(x,y) функциялары қосымша Коши-Риман шарттарын қанағатандырулары керек.

Коши-Риман шарттарын қанағаттандыратын екі гармониялық функция *түйіндес* деп аталады. Сонымен, U(x,y) және V(x,y) функциялары түйіндес болса, $f(z)=U(x;y)+i\cdot V(x;y)$ функциясы аналитикалық болады.

Мысал 39: $W=\sin 2z$ функциясының аналитикалылығын анықтау және оның туындысын табу қажет.

Шешімі: Функцияны W=U(x,y)+iV(x,y) түрінде жазып аламыз. Комплекс айнымалы синустың анықтамасы бойынша

$$W=\sin 2z=\frac{e^{i\cdot 2z}-e^{-i\cdot 2z}}{2i}=\frac{e^{2i\cdot(x+iy)}-e^{-2i\cdot(x+iy)}}{2i}=\frac{e^{2i\cdot x-2y}-e^{-2i\cdot x+2y}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-2y}\cdot(\cos 2x+i\cdot\sin 2x)-e^{2y}\cdot(\cos 2x-i\cdot\sin 2x)}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-2y}-e^{2y}}{2i}\cdot\cos 2x+\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}\cdot\sin 2x=\sin 2x\cdot ch\,2y+i\cdot\cos 2x\cdot sh\,2y.$$

$$U(x;y)=\sin 2x\cdot ch\,2y,\quad V(x;y)=\cos 2x\cdot sh\,2y.$$

$U(x;y)$ және $V(x;y)$ функцияларының дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2\cos 2x\cdot ch\,2y;\qquad \frac{\partial V}{\partial x}=-2\sin 2x\cdot sh\,2y;\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=2\sin 2x\cdot sh\,2y;\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=2\cos 2x\cdot ch\,2y.$$

Дербес туындылардың кез-келген (x,y) нүктесінде үзіліссіз және U(x,y), V(x,y) Коши-Риман шарттарын қанғаттандыратынын көреміз, олай болса, $W=\sin 2z$ кез келген нүктеде дифференциалданатын функция. Демек, ол бүкіл комплекс жазықтықта аналитикалық болады. (34) формуласы бойынша

$$(\sin 2z)'=2\cdot(\cos 2x\cdot ch\,2y-i\cdot\sin 2x\cdot sh\,2y)=2\cos 2z.$$

Мысал 40: Нақты бөлігі $U(x;y)=e^x cosy$ функциясы болатын және $f(0)=1$ шартын қанағаттандыратын $f(z)$=U(x,y)+iV(x,y) аналитикалық функциясын құрыңыз.

Шешімі: $f(z)=U(x;y)+i\cdot V(x;y)$ фунциясының нақты бөлігі $U(x;y)$ функциясы берілген. Олай болса $f(z)$ аналитикалық функциясын құру үшін бізге оның жорамал бөлігі $V(x;y)$ функциясын анықтау жеткілікті. $U(x;y)$ функциясының дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-e^x\sin y.$$

Есептің шарты бойынша $f(z)=U(x;y)+i\cdot V(x;y)$ функциясы аналитикалық, олай болса $U(x;y)$ және $V(x;y)$ функциялары Коши-Риман шарттарын қанағаттандырады:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}=e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}=e^x\sin y.$$

$\frac{\partial V}{\partial x}=e^x\sin y$ теңдігін x айнымалысы бойынша интегралдап $f(z)$ функциясының V жорамал бөлігін аламыз:

$$\int\frac{\partial V}{\partial x}dx=\int e^x\sin y\,dx+c(y)\quad\Rightarrow\ V=e^x\sin y+c(y),$$

мұндағы $c(y)$ - x айнымалысына қатысты интегралдау тұрақтысы - тек y айнымалысынан тәуелді кез келген функция. Есеп осы белгісіз $c(y)$ функциясын табуға әкелінді. Соңғы теңдікті y бойынша дифференциалдасақ

$$\frac{\partial V}{\partial y} = e^x \cos y + c'(y)$$

теңдігін аламыз. Коши-Риман шартының бірінші теңдігін қолдансақ

$$e^x \cos y + c'(y) = e^x \cos y \quad \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c$$

болатынын аламыз, мұндағы c кез келген тұрақты сан.

Сонымен $V = e^x \sin y + c$. Олай болса $f(z) = U(x, y) + iV(x, y) = e^x(\cos y + i\sin y) + c$. Бұдан, $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ формуласын ескерсек, $f(z) = e^z + c$ теңдігін аламыз. Енді c еркін тұрақтысының мәнін $f(z)$ функциясы $f(0) = 1$ шартын қанағаттандыратындай етіп таңдап аламыз:

$$f(0) = e^0 + c \quad \Rightarrow 1 = e^0 + c \quad \Rightarrow c = 0.$$

Олай болса $f(z) = e^z$.

Осылайша аналитикалық функцияны берілген жорамал бөлігі бойынша да құруға болады.

3.2 Комплекс айнымалы функцияның интегралы

$w = f(z)$ функциясы D облысында бірмәнді және үзіліссіз, C - осы облыстың A және B нүктелерін AB бағытында жалғайтын бөлік тегіс сызығы болсын.

C сызығын осы сызықтың бойында A нүктесінен B нүктесіне қарай тізбектеле орналасқан $A = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = B$ нүктелері арқылы $z_0 z_1, z_1 z_2, \ldots, z_{n-1} z_n$ бөлік сызықтарына бөлеміз де

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \cdot (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \cdot \Delta z_k \tag{36}$$

қосындысын құрамыз. Бұл қосынды $f(z)$ функциясының AB сызығындағы *интегралдық қосындысы* деп аталады.

Анықтама 21. $f(z)$ функциясының AB бағытындағы C сызығы бойынша алынған *интегралы* деп (36) қосындысының n санын барлық бөлік сызықтарының ұзындықтарының ең үлкені нөлге ұмтылатындай етіп шектеусіз өсіргендегі шегін айтамыз да

$$\int_C f(z)dz \tag{37}$$

түрінде белгілейміз.

Ескерту: Егер C тұйық сызық болса, онда интеграл $\oint_C f(z)dz$ түрінде белгіленіп *C тұйық контуры бойынша алынған интеграл* немесе *C тұйық контурлы интеграл* деп аталады.

Интегралдың анықтамасында С сызығының басы мен ұшы (оң сызылу бағыты) көрсетіледі, ал тұйық контур үшін оң сызылу бағытын былай көрсете алмаймыз. Тұйық контурдың оң сызылу бағыты ретінде сызу кезінде контурдың іші сол жақта қалатын бағытты аламыз.

Егер біз $z = x_k + y_k i$, $f(z_k) = U(x_k, y_k) + i\,V(x_k, y_k)$ белгілеулеріне көшсек, онда (36) интегралдық қосындысы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(U(x_k, y_k)\Delta x_k - V(x_k, y_k)\Delta y_k\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(V(x_k, y_k)\Delta x_k + U(x_k, y_k)\Delta y_k\right)\right)$$

түрінде жазылады да, интеграл анықтамасынан (37) интегралының екі қисық сызықты интеграл арқылы өрнектелінуін аламыз:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C U\,dx - V\,dy + i\cdot\int_C V\,dx + U\,dy \tag{38}$$

Интегралдың анықтамасынан оның келесі қасиеттері шығады:

1. $\int\limits_{C^-} f(z)dz = -\int\limits_{C^+} f(z)dz$, мұнда C^- және C^+ қарама – қарсы бағыттарда сызылған С сызығы;
2. $\int\limits_C k\,f(z)\,dz = k\int\limits_C f(z)\,dz$, мұнда k – комплекс тұрақты;
3. Егер С интегралдау қисығы $C_1, C_2, \dots, C_n$ бөлік тегіс қисықтарынан тұрса (яғни С – бөлік тегіс сызық болса), онда $\int\limits_C f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{C_k} f(z)dz$;
4. $\int\limits_C \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_C f_k(z)\,dz$, егер $\int\limits_C f_k(z)\,dz$ интегралы кез келген $k = 1, 2, \dots, n$ үшін бар болса;
5. $\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \le M\cdot l$, мұндағы l – С сызығының ұзындығы, $M = \max\limits_{z\in C}|f(z)|$;
6. Егер С сызығы
   $z(t) = x(t) + i\cdot y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$ параметрлік түрінде берілсе, онда
   $$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\left(x(t) + iy(t)\right)\left(x'(t) + iy'(t)\right)dt;$$
7. Егер F(z) функциясы D облысында аналитикалық $f(z)$ функциясының алғашқы функциясы болса (яғни $F'(z) = f(z)$ болса), онда басы z_1, ұшы z_2 нүктелері болатын осы облыста жатқан кез келген С тегіс қисығы үшін Ньютон - Лейбництің
   $$\int_C f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1) \tag{39}$$
   формуласы орынды болады.

Мысал 41: $\int\limits_C |z|dz$ интегралын есептеңіз, мұнда *C* сызығы -1 мен 1 нүктелерін қосатын кесінді.

Шешімі: Берілген интегралды -1 мен 1 нүктелерін қосатын кесіндінің $z = t, \quad -1 \le t \le 1$ параметрлік теңдеуін қолданып 6-қасиет бойынша есептейік:

$$\int_C |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |t|\,dt = \int_{-1}^{0} (-t)\,dt + \int_0^1 t\,dt = -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 1.$$

Мысал 42: Комплекс айнымалы функцияның интегралын берілген қисық бойынша есептеңіз:

$$\int_C z|z|dz, \quad C:\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \ge 0\}.$$

Шешімі: C сызығының параметрлік теңдеуін пайдаланайық. C - центрі 0 нүктесі, радиусы 1 болатын жоғарғы жарты жазықтықта жатқан жарты шеңбер болғандықтан оның параметрлік теңдеуі $z(t) = x(t) + iy(t) = \cos t + i\sin t$, $0 \le t \le \pi$ түрінде жазылады. Олай болса интегралдың 6-қасиеті бойынша

$$\int_C z|z|dz = \int_0^{\pi} (\cos t + i\sin t)\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t + \cos t)dt = \int_0^{\pi} \left(-\cos t\sin t + i\cos^2 t - i\sin^2 t - \cos t\sin t\right)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin 2t + i\cos 2t)dt = \left(\frac{\cos 2t}{2} + i\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \left(\frac{\cos 2\pi}{2} + i\frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \left(\frac{\cos 0}{2} + i\frac{\sin 0}{2}\right) = 0.$$

Демек, $\int_C z|z|dz = 0.$

Ескерту: Егер *C* сызығы *y=f(x)*, $a \le x \le b$ айқын түрінде берілсе, онда берілген интегралды *x* айнымалысын *t* параметрі ретінде алып 6 - қасиет бойынша есептеуге болады.

Мысал 43: $\int_C \operatorname{Jm} z\,dz$ интегралын есептеңіз, мұнда C сызығы O нүктесін $(2+i)$ нүктесімен қосатын кесінді.

Шешімі: C кесіндісінің теңдеуі: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Rightarrow \dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-0}{1-0} \Rightarrow y = \dfrac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 2.$

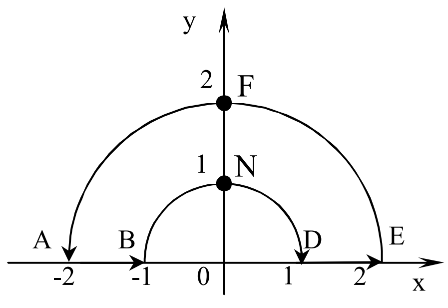
Олай болса,

$z = x + iy$, $\quad \operatorname{Jm} z = y$, $\quad dz = dx + idy$ болғандықтан,

$$\int_C \operatorname{Jm} z\,dz = \int_C y(dx + idy) = \int_0^2 \frac{x}{2}\left(dx + i\frac{1}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i}{2}\right)\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i}{2}\right)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 1 + \frac{i}{2}.$$

Мысал 44: $\oint_C \dfrac{z}{\bar{z}}dz$ интегралын есептеңіз, мұндағы C сызығы $1 \le |z| \le 2$, $\operatorname{Jm} z \ge 0$ жиынының оң бағытты шекарасы.

Шешімі: Интегралдау контурын бейнелейік (17-сурет).



17-сурет

Интегралды құрамдас сызықтар бойынша алынған интегралдардың қосындысы ретінде жазайық:

$$\oint_C \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_{AB} \frac{z}{\bar z}\,dz + \int_{BND} \frac{z}{\bar z}\,dz + \int_{DE} \frac{z}{\bar z}\,dz + \int_{EFA} \frac{z}{\bar z}\,dz.$$

Әрбір интегралды жеке-жеке есептейік.

AB контурында: $y=0,\ -2 \le x \le -1.\quad y=0 \Rightarrow z=x \Rightarrow dz=dx,\ \frac{z}{\bar z}=\frac{x}{x}=1$. Олай болса

$$\int_{AB} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_{-2}^{-1} dx = x\ \Big|_{-2}^{-1} = 1.$$

BCD контурында:

$z=e^{i\cdot\varphi},\ \ \frac{z}{\bar z}=\frac{e^{i\cdot\varphi}}{e^{-i\cdot\varphi}}=e^{2i\varphi},\ \ dz=i\cdot e^{i\cdot\varphi}d\varphi,\ \ \varphi$ бұрышы π-ден 0-ге дейін өзгереді. Олай болса

$$\int_{(BCD)} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_{\pi}^{0} e^{2i\cdot\varphi}\cdot i\cdot e^{i\cdot\varphi}\,d\varphi = i\cdot\int_{\pi}^{0} e^{3i\cdot\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{3}\cdot e^{3i\cdot\varphi}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{2}{3}.$$

DE контурында: $y=0,\ 1 \le x \le 2.\quad y=0 \Rightarrow \frac{z}{\bar z}=\frac{x}{x}=1,\ dz=dx.$ Олай болса

$$\int_{DE} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_{1}^{2} dx = 1.$$

EFA контурында:

$z=2e^{i\cdot\varphi},\ \ \frac{z}{\bar z}=\frac{2e^{i\cdot\varphi}}{2e^{-i\varphi}}=e^{2i\varphi},\ \ dz=2i\cdot e^{i\cdot\varphi}\,d\varphi,\ \ \varphi$ бұрышы 0-ден π-ге дейін өзгереді. Олай болса

$$\int_{(EFA)} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_{0}^{\pi} e^{2i\cdot\varphi}\cdot 2i\cdot e^{i\cdot\varphi}\,d\varphi = 2i\cdot\int_{0}^{\pi} e^{3i\cdot\varphi}\,d\varphi = \frac{2}{3}\cdot e^{3i\cdot\varphi}\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{4}{3}.$$

Нәтижесінде $\oint_C \frac{z}{\bar z}\,dz = 1+\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$

7-қасиеттің негізінде келесі тұжырым алынады.

Кошидің интегралдық теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы C тұйық контурында және осы контурмен шектелген D облысында аналитикалық болса, онда

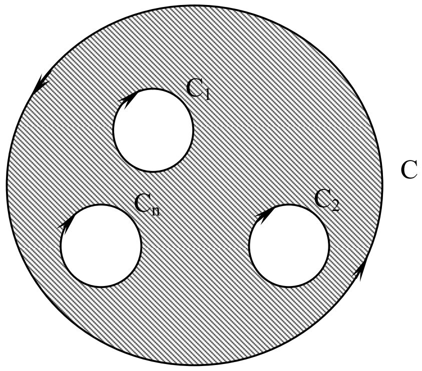
$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Көп байланысты облыс үшін Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы C және оған іштей орналасқан $C_1, C_2, \ldots, C_n$ тұйық контурларында және $C^+, C_1^-, C_2^-, \ldots, C_n^-$ контурларымен шектелген D облысында аналитикалық (мұндағы таңбалар контурлар бойынша айналу бағыттарын білдіреді

(18-сурет)) болса, онда

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

теңдігі орынды болады.



18-сурет

Егер f(z) функциясы C бөлік тегіс тұйық контурымен шектелген D облысында аналитикалық және $z_0 \in D$ болса, онда

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{40}$$

түріндегі Кошидің *интегралдық формуласы* орынды болады (Интеграл оң бағытты контур бойынша алынған).

Сонымен қатар, D облысында f(z) функциясының кез келген ретті туындысы бар болып, олар үшін келесі формула орынды болады

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \; z_0 \in D. \tag{41}$$

Интегралдарды есептеуде (40), (41) формулаларының

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0), \tag{42}$$

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0), \; n=1,2,3,\ldots. \tag{43}$$

түріндегі жазылулары қолданылады.

3.3 Есептер

№1. Туындының анықтамасына сүйене отырып, төмендегі функциялардың туындыларын табу керек:

1) $w = z^n$, n-бүтін оң сан;
2) $w = e^z$;
3) $w = \sin 2z$;
4) $w = \cos 3z$;
5) $w = tgz$;
6) $w = z^2 + 5z - 7$;
7) $w = z^2$;
8) $w = z \operatorname{Re} z$;
9) $w = \operatorname{Im} z$;
10) $w = \bar{z} + \operatorname{Re} z$.

№2. Төмендегі функцияларды аналитикалыққа зерттеу керек.

1) f(z)= e^{z}; 3) f(z)= $\frac{1}{z^2}$;

2) f(z)= z^{3}; 4) f(z)= $x^{2}-2yi$.

№3. Полярлық координаталарда Коши-Риман шарттары төмендегі түрде жазылатындығын көрсету керек:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

№4. f(z)=zRez функциясының туындысы тек z=0 нүктесінде ғана болатындығын дәлелдеу керек. Оны z=0 нүктесінде аналитикалық деп атауға бола ма?

№5. $W=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3-1\right)$ функциясының комплекс жазықтығында аналитикалық болатындығын дәлелдеп, оның туындысын табу керек.

№6. f(z)= $2z+3\bar{z}$ функциясының ешбір нүктеде туындысы болмайтынын дәлелдеу керек.

№7. $W=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$ функциясының бүкіл комплекс жазықтығының z=0 нүктесінен өзге нүктелерінде аналитикалық болатындығын дәлелдеу керек.

№8. $w=z\bar{z}$ функциясының $z_0=i$ нүктесінде туындысы бар ма?

№9. $f(z)=z|z|^2$ функциясының жазықтықтың қандай нүктелерінде туындысы бар?

№10. Келесі есептерде көрсетілген функцияның туындысы жазықтықтың қандай нүктелерінде бар екендігін анықтау керек. Бұл нүктелердің әрқайсысында туынды неге тең? Берілген функциялар аналитикалық бола ма?

1) $W=z^2+i|z|^2$; 3) $W=\bar{z}+\frac{z}{|z|^2}+z^3$; 5) $W=x^2+iy^2$;

2) $W=tgy\text{-}itgx$; 4) $W=xy+i\left(x^2-y^2\right)$; 6) $W=\frac{1}{z}$.

№11. Егер f(z) функциясы D облысының әр нүктесінде $f'(z)=0$ шартын қанағаттандыратын болса, онда оның осы облыста тұрақты болатынын дәлелдеу керек.

№12 Берілген функциялар жазықтықтың қандай нүктелерінде гармониялық болады?

1) x^2-y^2; 3) $\frac{y}{x}$; 5) $\ln(x^2+y^2)$; 7) x^2+y^2.

2) xy; 4) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 6) $\frac{x}{x^2+y^2}$;

№13. Келесі есептерде берілген нақты немесе жорамал бөліктері бойынша $f(z)=u+iv$ аналитикалық функциясын табу керек.

1) $\operatorname{Re}f(z)=2^{e^x}\sin y+3x-2y$;
2) $\operatorname{Re}f(z)=x^2+y^2$;
3) $\operatorname{Im}f(z)=xy^2$;
4) $\operatorname{Re}f(z)=\frac{2y}{x^2+y^2}+3y$;
5) $\operatorname{Re}f(z)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;
6) $\operatorname{Re}f(z)=x^2-y^2+x$, $f(0)=i$;
7) $\operatorname{Im}f(z)=2xy+3x$;
8) $\operatorname{Im}f(z)=e^{2x}\cos y$;
9) $u(x,y)=e^x\sin y$;
10) $v(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$;
11) $v(x,y)=x^3-3xy^2$;
12) $v(x,y)=3x^2y-y^3$, $f(0)=0$;
13) $u(x,y)=\frac{x^2-x+y^2}{x^2+y^2}$, $f(1)=0$;
14) $v(x,y)=-e^{-2y}\cos 2x+x$;
15) $u=e^{\frac{y}{x}}$;
16) $v=\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$;
17) $u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, $f(0)=0$;
18) $v=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$.

№14. $v=\sin x\sin y$ функциясы жазықтықтың қандай нүктелерінде Лаплас теңдігін қанағаттандырады? Осы функция жорамал бөлігі болатындай аналитикалық функция табыла ма?

№15. Егер u гармониялық функция болса, u^2 гармониялық функция бола ма?

№18. Егер f(z) - аналитикалық функция болса, келесі функциялар гармониялық бола ма?

1) $|f(z)|$; 2) $\arg f(z)$; 3) $\ln|f(z)|$.

№20. $\int\limits_C z\,dz$ интегралын A(-2,0), B(-1,1), D(1,1), E(2,0) нүктелерін қосатын C сынық сызығы бойынша есептеңіз.

№21. Келесі интегралдарды есептеңіз:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i}\sin z\,dz$;
2) $\int\limits_{1-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz$;
3) $\int\limits_0^{\ln 2} z\cdot e^z\,dz$;
4) $\int\limits_0^{i+1} z^3\,dz$;

5) $\int_0^i z\cdot \cos z\, dz$;

6) $\int_C \frac{z^3 dz}{z-i}$, C: $|z-1|=1$ шеңбері;

7) $\int_C (1+i-2\bar{z})\, dz$, C: $z_1=0$ және $z_2=1+i$ нүктелерін қосатын кесінді;

8) $\int_C (1+i-2\bar{z})\, dz$, $C: y=x^2$ параболасының $z_1=0$ нүктесінен $z_2=1+i$ нүктесіне дейінгі доғасы;

9) $\int_C \frac{\cos z\, dz}{z+2i}$, C: центрі i нүктесі, радиусы 2 болатын шеңбер;

10) $\int_C (z^2+z\cdot\bar{z})\, dz$, C: $|z|=1,\ 0\le \arg z\le \pi$ жарты шеңбері;

11) $\int_C \frac{z\, dz}{z^4-1}$, C: центрі 2 нүктесі, радиусы 2 болатын шеңбер;

12) $\int_C |z|\, dz$, C: радиусы R=1 болатын шеңбердің $z_1=-1$ нүктесінен $z_2=1$ нүктесіне дейінгі жоғарғы доғасы;

13) $\int_C \frac{z^4\, dz}{(z+1)^3}$, C: центрі 0 нүктесі, радиусы 2 болатын шеңбер;

14) $\int_C |z|\, dz$, C: $z_1=-1$ және $z_2=1$ нүктелерін қосатын кесінді.

№22. Келесі интегралдарды есептеңіз:

1) $\oint_{|z|=3} \frac{2z-1}{z(z-1)}dz$;

2) $\oint_{|z|=2} \frac{(z+5)dz}{(z-1)^2(z-3)}$;

3) $\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3\cdot(z+1)^3}$;

4) $\oint_{|z|=4} \frac{dz}{z^3-z^5}$;

5) $\oint_{|z|=2} \frac{z^4 dz}{(z+1)^3}$;

6) $\oint_{|z-2|=2} \frac{ze^z}{(z^2-1)^2}dz$;

7) $\oint_{|z|=\frac{3}{4}} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$;

8) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+z}$;

9) $\oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^2}dz$;

10) $\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}\, dz$;

11) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(z-2)(z+4)}$

12) $\oint_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}\, dz$;

13) $\oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3}\, dz$.

14) $\oint_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}\, dz$.

4 ТЕЙЛОР ЖӘНЕ ЛОРАН ҚАТАРЛАРЫ. АЙРЫҚША НҮКТЕЛЕР

4.1 Тейлор қатары

Бұл тақырыпта z_0 нүктесінің қандай да бір аймағында аналитикалық f(z) функциясының (28) түріндегі дәрежелік қатарға жіктеу сұрағы қарастырылады.

z_0 нүктесінің $|z-z_0|<R$ аймағында бірмәнді және аналитикалық f(z) функциясы осы аймақта

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+... \tag{44}$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n=0,1,..., \tag{45}$$

түрінде дәрежелік қатарына жіктеледі, мұндағы C – центрі z_0 болатын, берілген дөңгелекте жатқан кез келген оң бағытты шеңбер. Коэффиценттері (45) формуласымен анықталатын (44) қатары f(z) функциясының z_0 нүктесінің аймағындағы *Тейлор қатары* деп аталады.

Егер f(z) аналитикалық функциясы дәрежелік қатарға жіктелса, онда ол Тейлор қатары болады.

Тейлор қатарынан $z_0=0$ дербес жағдайында

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot z^n=c_0+c_1z+c_2z^2+...+c_nz^n+...$$

қатарын аламыз. Бұл қатар *Маклорен қатары* деп аталады.

e^z көрсеткіштік және $\sin z, \cos z$ тригонометриялық функцияларының $z_0=0$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына (яғни Маклорен қатарына) жіктелулері 2.5 тақырыбында олардың анықтамалары ретінде беріліп кеткен.

Енді

$$w=\ln(1+z),\quad w=(1+z)^{\alpha}$$

жіктелулеріне тоқталайық:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+...,\quad |z|<1; \tag{46}$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha+n-1)}{n!}z^n+...,\quad |z|<1. \tag{47}$$

(47) жіктелуі α=-1 жағдайында

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-...+(-1)^nz^n+...,\quad |z|<1 \tag{48}$$

түрінде жазылады. (46), (47) қатарлары $|z|<1$ дөңгелегінде абсолютті жинақты болады.

(46) формуласы логарифмнің бас мәнінің $z=0$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына жіктелуін береді. $\mathrm{Ln}(1+z)$ көпмәнді функциясының басқа мәндерінің Тейлор қатарына жіктелуін жазу үшін (46) қосындысына $2n\pi i,\ n=\pm1,\pm2,...$ санын қосу керек:

$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{z}) = 2n\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots .$$

Мысал 45: $\mathrm{f(z)} = \frac{1}{z-3}$ функциясын $z_0 = 1$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына жіктеңіз.

Шешімі: $\mathrm{f(z)}$ функциясын

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2-(z-1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{2}\right)}$$

түрінде жазамыз. Егер $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, яғни $|z-1| < 2$ болса, онда (48) жіктелуі бойынша

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{2^k} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(z-1)^k}{2^{k+1}}, \quad |z-1| < 2$$

теңдігін аламыз.

Мысал 46: $\mathrm{f(z)} = \frac{\mathrm{z}}{z^2-2z-3}$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз және қатардың жинақтылық радиусын табыңыз.

Шешімі: $\mathrm{f(z)}$ функциясын қарапайым бөлшектерге жіктейік:

$$\frac{\mathrm{z}}{z^2-2z-3} = \frac{\mathrm{z}}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} .$$

Егер $|z| < 1$ және $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, яғни $|z| < 1$ болса, онда соңғы екі бөлшекке (48) жіктелуін қолдана аламыз:

$$\frac{\mathrm{z}}{z^2-2z-3} = \frac{1}{4}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}z + \frac{8}{9}z^2 - \frac{28}{27}z^3 + \dots\right) = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2}z^2 - \frac{7}{27}z^3 + \dots .$$

Сонымен

$$\frac{\mathrm{z}}{z^2-2z-3} = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2}z^2 - \frac{7}{27}z^3 + \dots, \quad |z| < 1.$$

Мысал 47: $\mathrm{f(z)} = \frac{1}{3-2z}$ функциясын $\mathrm{z}_0 = 3$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына (яғни $\mathrm{z}-3$ айырмасының дәрежесі бойынша) жіктеңіз.

Шешімі: $\mathrm{f(z)}$ функциясын

$$\frac{1}{3-2z} = -\frac{1}{3-2(z-3+3)} = \frac{1}{-3-2(z-3)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}$$

түрінде жазып аламыз. Соңғы теңдіктің оң жағындағы $\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}$ бөлшегін z

айнымалысының $\left|\frac{2}{3}(z-3)\right|<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын, яғни $|z-3|<\frac{3}{2}$ дөңгелегінде жататын мәндері үшін (48) жіктелуі бойынша жіктеуге болады:

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}(z-3)+\left(\frac{2}{3}(z-3)\right)^2-\left(\frac{2}{3}(z-3)\right)^3+\ldots\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3-\ldots,\qquad |z-3|<\frac{3}{2}.$$

4.2 Теріс дәрежелік қатар

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n} \qquad (49)$$

түріндегі қатары берілсін, мұндағы $z=x+iy$ - комплекс айнымалы, $z_0,\ c_{-n}\ (n=1,2,\ldots)$ - берілген комплекс сандар, c_{-n} - қатардың коэффициенті. Бұл қатарды *теріс дәрежелік қатар* деп атаймыз.

Егер (49) қатарында $\frac{1}{z-z_0}=\omega$ ауыстыруын жасасақ

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\omega^n$$

дәрежелік қатарын аламыз. Бұл қатардың R жинақтылық радиусы мен $|\omega|<R$ жинақтылық дөңгелегін (29) немесе (30) формуласы бойынша тауып алып $\omega=\frac{1}{z-z_0}$ кері ауыстыруын жасасақ, (49) қатарының

$$|z-z_0|>r \qquad (50)$$

жинақтылық облысын аламыз, мұндағы r саны

$$r=\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}\ \text{немесе}\ r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}. \qquad (51)$$

формулалары бойынша табылады.

Мысал 48: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z+i)^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: Мұнда $c_{-n}=\sin in=i\,sh\,n,\quad c_{-n-1}=i\,sh(n+1),\quad z_0=-i.$ Сондықтан

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|i\,sh(n+1)|}{|i\,sh\,n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{sh(n+1)}{sh\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e^n-e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e-e^{-2n-1}}{1-e^{-2n}}=e.$$

Демек, қатар $|z+i|>e$ облысында, яғни центрі $z_0=-i$ нүктесі және радиусы e болатын дөңгелектің сыртында жинақты.

Мысал 49: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: Мұнда $c_{-n}=(1+i)^{n+1},\quad c_{-n-1}=(1+i)^{n+2},\quad z_0=0.$ Сондықтан

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(1+i)^{n+2}\right|}{\left|(1+i)^{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}|1+i|=\sqrt{2}.$$

Демек, қатар $|z|>\sqrt{2}$ облысында жинақты.

4.3 Лоран қатары

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$
$$=\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots \qquad (52)$$

түріндегі қатарды қарастырамыз. Бұл қатардың *жинақтылық облысы* деп (49) қатары да, (44) қатары да жинақты болатын облысты айтамыз.

Мысал 50: $\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots$ қатарының жинақтылық облысын анықтап, қосындысын табу керек.

Шешімі:

$$\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots$$

қатары еселігі $q=\frac{z}{2}$ болатын геометриялық қатар. Олай болса ол тек $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын z нүктелерінде, яғни $|z|<2$ дөңгелегінде жинақты болады да, оның қосындысы $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=\dfrac{1}{2-z}$ функциясына тең болады.

Ал

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots$$

қатары еселігі $q=\frac{1}{z}$ болатын геометриялық қатар болғандықтан, ол $|z|>1$ облысында жинақты болады да, оның қосындысы $\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{z-1}$ функциясы болады. Сонымен бірінші қатар $|z|<2$ дөңгелегінде, екінші қатар $|z|>1$ облысында жинақты. Олай болса екі қатар да $1<|z|<2$ сақинасында жинақты болады да берілген қатардың қосындысы $\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2-z}=\frac{-1}{z^2-3z+2}$ функциясы болады.

(49) қатары $|z-z_0|>r$ облысында, яғни центрі $z=z_0$ радиусы r болатын

дөңгелектің сыртында; ал (44) қатар $|z-z_0|<R$ дөңгелегінде жинақты болсын.

Бұдан, егер

1) $r>R$ болса, онда (52) қатары бүкіл жазықтықта жинақсыз;
2) $r<R$ болса, онда (52) қатары $r<|z-z_0|<R$ сақинасында жинақты. Мұнда $r\geq 0,\quad 0<R<+\infty$.

r және R радиустары сәйкесінше (50) және (43), (44) формулалары бойынша табылады.

Мысал 51: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ қатары үшін

$$\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}=(3+4i)^n,\quad \mathrm{c}_{-\mathrm{n}\text{-}1}=(3+4i)^{n+1}.$$

Онда

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(3+4i)^{n+1}\right|}{\left|(3+4i)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}|3+4i|=5.$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ қатары үшін

$$\mathrm{c}_{\mathrm{n}}=6^{-n},\quad \mathrm{c}_{\mathrm{n}+1}=6^{-n-1}.$$

Онда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|6^{-n}\right|}{\left|6^{-n-1}\right|}=6.$$

Демек, $r=5<R=6.$ Олай болса берілген қатар $5<|z+2i|<6$ сақинасында жинақты.

Мысал 52: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(z+1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}$ қатары үшін

$$\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}=e^{in},\quad \mathrm{c}_{-\mathrm{n}\text{-}1}=e^{i(n+1)}.$$

Онда

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|e^{i(n+1)}\right|}{\left|e^{in}\right|}=1.$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(z+1)^n$ қатары үшін

$$\mathrm{c}_{\mathrm{n}}=2^n,\quad \mathrm{c}_{\mathrm{n}+1}=2^{n+1}.$$

Онда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|2^n\right|}{\left|2^{n+1}\right|}=\frac{1}{2}.$$

Сонымен $r = 1 > \frac{1}{2} = R$.

Демек, берілген қатар бүкіл жазықтықта жинақсыз.

Енді *f(z)* аналитикалық функциясының (52) түріндегі қатарға жіктелуін қарастырамыз.

Лоран теоремасы. $0 \le r < |z - z_0| < R \le +\infty$ сақинасында бірмәнді және аналитикалық *f(z)* функциясы үшін осы сақинада жалғыз түрде келесі жіктелу орынды болады:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{53}$$

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{54}$$

мұндағы C– центрі $z = z_0$ нүктесі болатын, берілген сақинада жатқан кез келген шеңбер.

(53) қатары *f(z)* функциясының *Лоран қатары* деп аталады.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{55}$$

қатары (53) Лоран қатарының бас бөлігі, ал

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z - z_0)^n$$

қатары *Лоран қатарының дұрыс* (*регулярлы*) *бөлігі* деп аталады.

Іс жүзінде (54) формуласы бойынша c_n коэффициентін табу күрделі есептеулерге әкелетін себепті оны жиі қолданбаймыз. Әдетте, егер мүмкін болса, қарапайым функциялардың Тейлор қатарына жіктелуінің дайын формулаларын пайдаланған қолайлы болады.

Мысал 53: $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}$ функциясын $z_0 = 0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктеңіз.

Шешімі: $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}$ функциясының айрықша нүктелері бөлшектің бөлімі нөлге айналатын $z_1 = -2$ және $z_2 = 3$ нүктелері болады. Олай болса аталған функция

а) $|z| < 2$; б) $2 < |z| < 3$; в) $|z| > 3$

облыстарында аналитикалық. Функцияны осы облыстарда жеке-жеке қарастырамыз. $f(z)$ функциясын

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right)$$

түрінде жазайық.

а) $|z| < 2$ дөңгелегінде $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ және $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ болғандықтан

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+...\right),$$

$$-\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-...\right)$$

жіктелулері орынды болады. Олай болса

$$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{z^2-z-6}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n=-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}z-\frac{7}{27\cdot 8}z^2+...,\quad |z|<2.$$

б) $2<|\mathrm{z}|<3$ сақинасында $\left|\frac{z}{3}\right|<1$ және $\left|\frac{2}{z}\right|<1$ болғандықтан

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+...\right),$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-...\right)=\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}$$

жіктелулері орынды болады. Олай болса

$$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{z^2-z-6}=-\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right),\quad 2<|z|<3.$$

в) $|\mathrm{z}|>3$ облысында $\left|\frac{3}{z}\right|<1$ және $\left|\frac{2}{z}\right|<1$ болғандықтан

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+...\right),$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-...\right)$$

жіктелулері орынды болады. Олай болса

$$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{z^2-z-6}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right),\quad |z|>3.$$

Мысал 54: $\mathrm{f(z)}=\frac{1}{\left(\mathrm{z}^2-1\right)^2}$ функциясын Лоран қатарына $0<|z-1|<2$ сақинасында жіктеңіз.

Шешімі: $\mathrm{f(z)}$ функциясын $(\mathrm{z-1})$ айырмасы арқылы өрнектеп алайық:

$$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{(\mathrm{z}^2-1)^2}=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{z}-1}-\frac{1}{\mathrm{z}+1}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(\mathrm{z}-1)^2}-\frac{2}{(\mathrm{z}-1)\cdot(\mathrm{z}+1)}+\frac{1}{(\mathrm{z}+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(\mathrm{z}-1)^2}-\frac{1}{\mathrm{z}-1}+\frac{1}{\mathrm{z}+1}+\frac{1}{(\mathrm{z}+1)^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(\mathrm{z}-1)^2}-\frac{1}{\mathrm{z}-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{z}-1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{\mathrm{z}-1}{2}}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-1}+\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2}\right).$$

Соңғы екі қосылғыштарға, $0<|z-1|<2$ облысында $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$ болғандықтан, (47) жіктелуін сәйкесінше $\alpha=-1$ және $\alpha=-2$ жағдайларында қолдануға болады:

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{1}{8}\left(1-\left(\frac{z-1}{2}\right)+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-(z-1)+\frac{3}{2^2}(z-1)^2-\frac{4}{2^3}(z-1)^3+\ldots\right),$$

яғни

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-\frac{3}{64}(z-1)^3+\ldots.$$

Сонымен

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{2^{n+4}}(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<2.$$

4.4 Функцияның нөлдері

1. Функцияның нөлдері

Егер $f(z_0)=0$ болса, онда z_0 нүктесі $f(z)$ *функциясының нөлі (түбірі)* деп аталады.

$f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық болсын.

Анықтама 22. Егер

$$f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,\ldots,f^{(n-1)}(z_0)=0,\quad f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

шарттары орындалса, онда z_0 нүктесі $f(z)$ *функциясының* n *еселі (немесе* n *-ретті) нөлі* деп аталады.

Егер $n=1$ болса, онда z_0 нүктесі *жай (қарапайым) нөл* деп аталады.

Мысал 55: $f(z)=1+\cos z$ функциясының нөлдерін тауып және олардың ретін анықтаңыз.

Шешімі: $f(z)=0$ теңдеуінен функцияның нөлдері

$$1+\cos z=0\Leftrightarrow\cos z=-1\Leftrightarrow z_k=(2k+1)\pi,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

нүктелері болатынын табамыз. Енді, $f(z)$ функциясының туындыларының осы нөлдердегі мәндерін қарастырамыз.

$$f'[(2k+1)\pi]=-\sin(2k+1)\pi=0,$$

$$f''[(2k+1)\pi]=-\cos(2k+1)\pi=1\neq 0.$$

Олай болса, анықтама 22 бойынша, $z_k=(2k+1)\pi,\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ нүктелері берілген функцияның екінші ретті нөлдері болып табылады.

Мысал 56: $f(z)=1-e^z$ функциясының нөлдерін тауып, олардың ретін анықтаңыз.

Шешімі: $f(z)=0$ теңдеуінен функцияның нөлдері

$$1-e^z=0 \Leftrightarrow e^z=1 \Leftrightarrow z=Ln1 \Leftrightarrow z=\ln 1+2k\pi i, \quad k=0,\pm 1,... \Leftrightarrow z_k=2k\pi i, \quad k=0,\pm 1, ...$$

нүктелері болатынын аламыз.

$$f'(2k\pi i)=-e^{2k\pi i}=-1\neq 0.$$

Сонымен, $f(2k\pi i)=0,\ f'(2k\pi i)\neq 0,$ олай болса, анықтама 22 бойынша, $z_n=2k\pi i\ \ (k=0,\pm 1, ...)$ нүктелері $f(z)=1-e^z$ функциясының қарапайым нөлдері болады.

Теорема 1. z_0 нүктесі осы нүктеде аналитикалық $f(z)$ функциясының n еселі нөлі болуы үшін z_0 нүктесінің қандай да бір аймағында $f(z)$ функциясы $\varphi(z_0)\neq 0$ шартын қанағаттандыратын және z_0 нүктесінде аналитикалық $\varphi(z)$ функциясы арқылы

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$$

түрінде өрнектелінуі қажетті және және жеткілікті.

Мысал 57: $f(z)=(z^2+1)^3 shz$ функциясының нөлдерін тауып, оның ретін анықтаңыз.

Шешімі: $f(z)$ функцисының нөлдері $f(z)=(z^2+1)^3 shz=0$ теңдеуінің, яғни $z^2+1=0$ және $shz=0$ теңдеулерінің түбірлері болады. Бұл теңдеулерді шеше отырып $f(z)$ функциясының нөлдерін табамыз:

$$z=-i, \quad z=i, \quad z=k\pi i, \quad k=0,\pm 1,\pm 2,... .$$

$z=-i$ нөлін қарастырайық. $f(z)$ функциясын келесі түрде жазамыз:

$$f(z)=((z+i)(z-i))^3 shz=(z-(-i))^3(z-i)^3 shz=(z-(-i))^3\varphi(z),$$

мұндағы $\varphi(z)=(z-i)^3 shz$ функциясы $z=-i$ нүктесінде аналитикалық, сондай-ақ $\varphi(-i)=8i\, shi=-8\sin 1\neq 0$. Онда Теорема 1 бойынша $z=-i$ нүктесі үшінші ретті нөл болады. Осылайша, $z=i$ нүктесінің де үшінші ретті нөл болатыны анықталады. $z=k\pi i, k=0,\pm 1,\pm 2,...$ нөлдерінің ретін анықтама 22 бойынша анықтаймыз:

$$f'(z)=6z(z^2+1)^2 shz+(z^2+1)^3 chz \quad \Rightarrow f'(k\pi i)=(1-k^2\pi^2)^3 chk\pi i\neq 0.$$

Сондықтан $f(k\pi i)=0,\ f'(k\pi i)\neq 0,$ олай болса $z=k\pi i\ \ (k=0;\pm 1;\pm 2;...)$ нүктелері–қарапайым нөлдер.

4.5 Оқшауланған айрықша нүктелер

Анықтама 23. Егер z_0 айрықша нүктесінің қандай да бір аймағында $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінен басқа айрықша нүктесі болмаса, онда z_0 айрықша нүктесі $f(z)$ *функциясының оқшауланған айрықша нүктесі* деп аталады.

Мысал 58: $W=\cos\frac{1}{z^2-1}$ функциясының айрықша нүктелері оқшауланған айрықша нүктелер болатынын көрсетіңіз.

Шешімі: $t=\frac{1}{z^2-1}$ функциясы z_1= -1 және z_2= -2 нүктелерінен басқа нүктелерде аналитикалық, ал W=cost функциясы кез келген t үшін аналитикалық болатындықтан $W=\cos\frac{1}{z^2-1}$ күрделі функциясы z_1=-1, z_2= 1 нүктелерінен басқа барлық нүктелерде аналитикалық болады. z_1 және z_2 нүктелерінің ара қашықтығы $|z_1-z_2|=|-1-1|=2$. Олай болса, олардың кез келгенінің радиусы екіден кіші аймағында өзінен басқа айрықша нүкте болмайды, онда анықтама 23 бойынша z_1=-1, z_2= 1 - оқшауланған айрықша нүктелер.

Бұл мысал негізінде келесі қорытындыны жасауға болады:
Егер айрықша нүктелер саны шектеулі болса, онда олар оқшауланған айрықша нүктелер болады.

Мысал 59: $W=\sec\frac{1}{z-1}$ функциясы үшін z=1 нүктесі оқшауланған айрықша нүкте бола ма?

Шешімі: $W=\sec\frac{1}{z-1}=\frac{1}{\cos\frac{1}{z-1}}$ функциясы үшін z-1=0 немесе $\cos\frac{1}{z-1}=0$ теңдіктерін қанағаттандыратын нүктелер, яғни $z=1$ және $z_k=1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\kappa\pi}$, $(k=0,\pm1,...)$ нүктелері айрықша нүктелер болады. Сонымен қатар $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\kappa\pi}\right)=1+0=1=z,$ яғни $z=1$ айрықша нүктесі z_k айрықша нүктелер тізбегінің шегі. Олай болса, шектің анықтамасы бойынша, $z=1$ нүктесінің кез келген аймағында z_k айрықша нүктелер тізбегінің мүшелері бар болады. Басқаша айтсақ, $z=1$ айрықша нүктесінің өзінен басқа айрықша нүкте болмайтын аймағы жоқ, онда анықтама 23 бойынша $z=1$ айрықша нүктесі оқшауланған айрықша нүкте емес.

Оқшауланған айрықша нүкте функцияның осы нүктедегі шегіне байланысты *түзетілетін, полюс* және *маңызды* деп үш түрге бөлінеді. Енді соларға тоқталайық.

z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған айрықша нүктесі болсын.

Анықтама 24. Егер $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ шегі тиянақты болса (яғни санға тең болса), онда $f(z)$ функциясының z_0 оқшауланған айрықша нүктесі *түзетілетін (аласталатын) айрықша нүкте* деп аталады.

Мысал 60: $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ функциясының айрықша нүктелерін тауып, оларды сипаттаңыз.

Шешімі: Берілген функция бүкіл жазықтықта аналитикалық екі функцияның қатынасы арқылы беріліп тұрғандықтын оның айрықша нүктелері бөлшектің бөлімінің нөлі, яғни z=0 нүктесі болады. Функцияның z=0 нүктесіндегі шегін табамыз:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.$$

Шек тиянақты, онда анықтама 24 бойынша z=0 - түзетілетін айрықша нүкте.

Анықтама 25. Егер

$$\lim_{z\to z_0} f(\mathrm{z})=\infty$$

болса, онда $f(\mathrm{z})$ функциясының z_0 оқшауланған айрықша нүктесі *полюс* деп аталады.

Теорема 2. z_0 нүктесі $f(\mathrm{z})$ функциясының полюсі болуы үшін, оның

$$\varphi(\mathrm{z})=\frac{1}{f(z)}$$

функциясының нөлі болуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама 26. Егер z_0 нүктесі $\varphi(\mathrm{z})=\dfrac{1}{f(z)}$ функциясы үшін n еселі нөл болса, онда $f(\mathrm{z})$ функциясының z_0 оқшауланған айрықша нүктесі *n еселі полюс* деп аталады.

$\mathrm{n}=1$ жағдайында полюсті *қарапайым (жай)* деп атаймыз.

Мысал 61: $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-2chz}$ функциясының $\mathrm{z}=0$ айрықша нүктесін сипаттаңыз.

Шешімі: $\mathrm{z}=0$ нүктесінде бөлшектің бөлімі нөлге тең болғандықтан $\mathrm{z}=0$ нүктесі $f(\mathrm{z})$ функциясының айрықша нүктесі болады. Енді осы нүктенің

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=2+z^2-2chz$$

функциясының нешінші ретті нөлі болатынын анықтайық:

$$\varphi'(z)=2z-2shz,\quad \varphi'(0)=0;$$
$$\varphi''(z)=2-2chz,\quad \varphi''(0)=0;$$
$$\varphi'''(z)=-2shz,\quad \varphi'''(0)=0;$$
$$\varphi^{IV}(z)=-2chz,\quad \varphi^{IV}(0)=-2\neq 0.$$

Демек, $\mathrm{z}=0$ нүктесі $\varphi(z)$ үшін төртінші ретті нөл болады. Олай болса, анықтама 25 бойынша $\mathrm{z}=0$ нүктесі берілген $f(\mathrm{z})$ функциясы үшін төртінші ретті полюс болады.

Теорема 3. z_0 нүктесі $f(\mathrm{z})$ функциясы үшін n еселі полюс болу үшін z_0 нүктесінің қандай да бір аймағында $f(\mathrm{z})$ функциясының z_0 нүктесінде аналитикалық және $\varphi(\mathrm{z}_0)\neq 0$ шартын қанағаттандыратын $\varphi(\mathrm{z})$ функциясы арқылы

$$f(\mathrm{z})=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$$

түрінде өрнектелінуі қажетті және жеткілікті.

Мысал 62: $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$ функциясының айрықша нүктелерін тауып, оларды сипаттаңыз.

Шешімі: Бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктейік:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2(z+1)-(z+1)}=\frac{\sin z}{(z+1)(z^2-1)}=\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}=\frac{\sin z}{(z-(-1))^2(z-1)}.$$

Соңғы өрнектен $f(z)$ функциясының $z=-1$ және $z=1$ екі айрықша нүктелері болатыны шығады.

$z=-1$ айрықша нүктесін сипаттайық. $f(z)$ функциясын

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z-(-1))^2}=\frac{\varphi(z)}{(z-(-1))^2}$$

түрінде жазайық. Мұндағы

$$\varphi(z)=\frac{\sin z}{z-1}$$

функциясы $z=-1$ нүктесінің $z=1$ нүктесі жатпайтын аймағында аналитикалық, әрі $\varphi(-1)=\frac{\sin 1}{2}\neq 0$. Сондықтан, теорема 3 бойынша $z=-1$ нүктесі $f(z)$ функцияның екі еселі полюсі болады. Сол сияқты $f(z)$ функциясының

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1}$$

түріндегі жазылуын пайдаланып $z=1$ айрықша нүктесінің $f(z)$ функциясы үшін қарапайым полюс болатынын қорытындылаймыз.

Теорема 1 және Теорема 3 –тен келесі салдарды жазуға болады.

Салдар. Егер z_0 нүктесі:

1) $\varphi(z)$ функциясының «k» еселі нөлі;

2) $g(z)$ функциясының «n» еселі нөлі және $k<n$ болса, онда z_0 нүктесі $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$ функциясының $n-k$ еселі полюсі болады.

Дәлелдеуі: 1), 2) шарттарынан теорема 1 бойынша $\varphi(z)=(z-z_0)^k\psi(z)$ және $g(z)=(z-z_0)^n\omega(z)$ теңдіктері орынды болатындай $\psi(z_0)\neq 0, \omega(z_0)\neq 0$ шарттарын қанағаттандыратын $\psi(z), \omega(z)$ аналитикалық функциялары табылады да $f(z)$ функциясы келесі түрде жазылады:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^k\psi(z)}{(z-z_0)^n\omega(z)}=\frac{\frac{\psi(z)}{\omega(z)}}{(z-z_0)^{n-k}}.$$

Бұл теңдіктен, $\frac{\psi(z)}{\omega(z)} \neq 0$ болғандықтан, Теорема 3 бойынша $z_0 = 0$ нүктесінің $f(z)$ үшін «$n - k$» ретті полюс болатыны шығады.

Мысал 63: $f(z) = \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}$ функциясының $z = 1$ айрықша нүктесін сипаттаңыз.

Шешімі:

$z = 1$ нүктесі бөлшектің бөлімі

$$\psi(z) = 2e^{z-1} - z^2 - 1,$$

функциясы үшін үшінші ретті нөл болып табылады:

$$\psi(1) = 0;$$

$$\psi'(1) = \left(2e^{z-1} - 2z\right)\Big|_{z=1} = 0;$$

$$\psi''(1) = \left(2e^{z-1} - 2\right)\Big|_{z=1} = 0;$$

$$\psi'''(1) = 2e^{z-1}\Big|_{z=1} = 2 \neq 0.$$

$z = 1$ нүктесі бөлшектің алымы

$$w(z) = \sin \pi z,$$

үшін бірінші ретті нөл болады:

$$w(1) = \sin \pi = 0$$

$$w'(1) = \left(\pi \cos \pi z\right)\Big|_{z=1} = -\pi \neq 0$$

Онда, салдар бойынша, $z = 1$ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін 3-1=2 ретті полюс болады.

Анықтама 27: Егер $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ шегі жоқ болса, онда z_0 айрықша нүктесі $f(z)$ функциясының *маңызды (елеулі) айрықша нүктесі* деп аталады.

Мысал 64: $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ функциясының $z = 0$ айрықша нүктесін сипаттаңыз.

Шешімі: $f(z)$ функциясының z айнымалысының 0 нүктесіне нақты және жорамал өстерінің бойымен ұмтылғандағы өзгеруін қарастырайық.

Нақты өсте $y = 0$, $z = x$. Онда

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty .$$

Жорамал өсте $x = 0$, $z = iy$, онда

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{(iy)^2}} = \lim_{y \to 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0 .$$

Екі шек бір-біріне тең болмағандықтан, яғни $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ шегі жоқ. Олай болса, анықтама 27 бойынша, $z = 0$ нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды айрықша нүктесі.

$z = a$ нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған айрықша нүктесі болсын.

Онда $z=a$ нүктесінің қандай да бір $0<|z-a|<R$ тесік аймағында $f(\mathrm{z})$ аналитикалық функция болады да, осы аймақта $(z-a)$ айырмасының дәрежелері бойынша Лоран қатарына жіктеледі.

Енді, функцияның оқшауланған айрықша нүктесінің қандай түрге жататынын функцияның осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктелуін пайдаланып анықтауға мүмкіндік беретін келесі үш теореманы келтірейік.

Теорема 4. z_0 нүктесі $f(\mathrm{z})$ функциясының түзетілетін айрықша нүктесі болуы үшін $f(\mathrm{z})$ функциясының z_0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуінің тек дұрыс бөліктен тұруы, яғни

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...+c_n(z-a)^n+...,$$

түрінде жазылуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 5. z_0 нүктесі $f(\mathrm{z})$ функциясының n еселі полюсі болуы үшін $f(\mathrm{z})$ функциясының z_0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуінде $c_{-n}\neq 0$ және кез келген натурал k үшін $c_{-(n+k)}=0$ болуы, яғни жіктелудің

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+...+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+..., \quad c_{-n}\neq 0$$

түрінде жазылуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 6. z_0 нүктесі $f(\mathrm{z})$ функциясының маңызды айрықша нүктесі болуы үшін $c_{-n}\neq 0$ теңсіздігінің n нөмірінің шексіз көп мәндері үшін орынды болуы, яғни Лоран қатарының негізгі бөлігінің мүшелерінің саны шектеусіз болуы қажетті және жеткілікті.

Мысал 65: $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$ функциясының $\mathrm{z}_0=0$ айрықша нүктесін сипаттаңыз.

Шешімі: $f(\mathrm{z})$ функциясының $\mathrm{z}_0=0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуін алу үшін e^{-z} аналитикалық функциясының $\mathrm{z}_0=0$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына жіктелуін қолданамыз:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-e^{-z}\right)=\frac{1}{z}\left[1-\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+...\right)\right]=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-...\right)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-....$$

Бұл жіктелуде негізгі бөлім, яғни z айнымалысының теріс дәрежелі мүшелері жоқ. Сондықтан, Теорема 4 бойынша $\mathrm{z}_0=0$ нүктесі түзетілетін айрықша нүкте болады. $f(\mathrm{z})$ функциясының жоғарыдағы жіктелуі $\mathrm{z}_0=0$ айрықша нүктесінен өзгеше нүктелер үшін ғана орынды болады. Дегенмен де $1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}-...$ қатарының $\mathrm{z}=0$ нүктесіндегі қосындысы бірге тең. Егер $f(\mathrm{z})$ функциясын $\mathrm{z}=0$ нүктесінде $f(0)=1$ деп қосымша анықтасақ, $\mathrm{z}_0=0$ нүктесінде аналитикалық болатын

$$f(\mathrm{z})=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-z}}{z}, & \text{егер} \quad \mathrm{z}\neq 0,\\ 1, & \text{егер} \quad \mathrm{z}=0,\end{cases}$$

функциясын аламыз.

Мысал 66: $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^7}$ функциясының $\mathrm{z}_0=0$ айрықша нүктесін сипаттаңыз.

Шешімі: $\cos z$ функциясын z дәрежелері бойынша Тейлор қатарына жіктеп $f(\mathrm{z})$ функциясының $\mathrm{z}_0=0$ нүктесінің аймағында Лоран жіктелуін аламыз

$$f(z)=\frac{1}{z^7}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{10}}{10!}-...\right)=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10!}-\dots .$$

Бұл жіктелінуде $\mathrm{c}_{-5}=\dfrac{1}{2!}\neq 0$ де, $\mathrm{c}_{-6}=\mathrm{c}_{-7}=...=0$ болғандықтан, Теорема 5 бойынша $\mathrm{z}_0=0$ нүктесі бесінші ретті полюс болады.

Мысал 67: $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$ функциясының $\mathrm{z}=1$ айрықша нүктесін сипаттаңыз.

Шешімі:

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+...$$

жіктелуінде $\mathrm{u}=\dfrac{1}{z-1}$ деп алып $f(\mathrm{z})$ функциясының $\mathrm{z}=1$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуін аламыз

$$\mathrm{f}(\mathrm{z})=(\mathrm{z}-1)\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+...\right]=1+(z-1)+\frac{1}{2!(z-1)}+\frac{1}{3!(z-1)^2}+...$$

Бұл жіктелуде $\mathrm{z}-1$ айырмасының теріс дәрежелі мүшелер саны шектеусіз. Сондықтан Теорема 6 бойынша $\mathrm{z}_0=1$ нүктесі $f(\mathrm{z})$ функциясының маңызды айрықша нүктесі болады.

4.6 Есептер

№1. Дәрежелік қатарлардың жинақтылық радиусын табыңыз.

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-i^{n-1}}{z^n}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}z^n$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$;

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)z^n$;

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!\,z^n}$;

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}z^n$;

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ch\frac{i}{n}z^n$;

8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n$;

9) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$;

10) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$;

№2. Берілген функцияларды Тейлор қатарына жіктеп және жинақтылық радиусын табыңыз.

1) $f(z) = cosz$, $z+\frac{\pi}{4}$;

2) $f(z) = \sin(2z+1)$, $z+1$;

3) $f(z) = \ln(2+z-z^2)$, z;

4) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}$, z;

5) $f(z) = cos^2 \frac{iz}{2}$, z;

6) $f(z) = e^z$, $2z-1$;

7) $f(z) = \frac{1}{3z+1}$, $z+2$;

8) $f(z) = \ln(2-z)$, z;

9) $f(z) = sh^2 \frac{z}{2}$, z;

10) $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$, z.

№3. Келесі қатарлардың жинақтылық облысын табыңыз.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n (iz)^{-n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{-n}}{(z-2-i)^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^n}{z^n}$.

№4. Келесі қатарлардың жинақтылық облысын табыңыз.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{z^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n$.

№5. Келесі функцияларды z=0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктеңіз.

1) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$; 5) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$;

2) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$; 6) $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$;

3) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$; 7) $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$;

4) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z^4}$; 8) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

№6. Келесі функцияларды берілген нүктелердің аймағында Лоран қатарына жіктеңіз.

1) $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$, $z_0=-1$;

2) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2}$, $z_0=2$;

3) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2}$, $z_0=-1$.

№7. Келесі функцияларды берілген сақиналарда Лоран қатарына жіктеңіз.

1) $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$, $0<|z|<1$; 6) $f(z)=\dfrac{3}{z^2+z-2}$, $1<|z|<2$;

2) $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$, $0<|z|<\infty$; 7) $f(z)=\dfrac{z}{(z-i)(z+3)}$, $1<|z|<3$;

3) $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$, $1<|z+2|<3$; 8) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$;

4) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $1<|z+2|<4$; 9) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $0<|z-i|<2$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, $1<|z|<4$; 10) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1<|z|<2$.

№8. Төмендегі функциялардың $(z-a)^{-1}$ дәрежелері бойынша Лоран қатарына жіктеу керек.

1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z-2)(z+3)}$, $a=0$; 4) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$, $a=0$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$, $a=0$; 5) $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}$, $a=0$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3iz-2}$, $a=2i$; 6) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^2}$, $a=-1$;

7) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z}$, $a=0$;

8) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$, $a=1$;

9) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $a=-1$.

№9. Берілген функциялардың оқшауланған айрықша нүктелерін тауып, оларды сипаттаңыз.

1) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

2) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}$;

3) $f(z)=\dfrac{z}{1-\cos z}$;

4) $f(z)=\dfrac{1+z}{z^2}$;

5) $f(z)=z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$;

6) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$;

7) $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^4}$;

8) $f(z)=\dfrac{z^4+z}{z^3}$.

№10. Келесі есептерде z=0 оқшауланған айрықша нүкте бола ма, болса оларды сипаттаңыз.

1) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}$;

2) $f(z)=ctg\dfrac{1}{z}$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$;

4) $f(z)=z^2\sin z$.

№11. Көрсетілген функциялардың айрықша нүктелерін тауып, сипаттаушы қасиеттер көмегімен олардың типін анықтау керек.

1) $f(z)=\dfrac{tgz}{z}$;

2) $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{z}$;

3) $f(z)=e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$;

4) $f(z)=e-\dfrac{1}{z^2}$;

5) $f(z)=e\dfrac{z}{1-z}$;

6) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$.

5 ШЕГЕРМЕЛЕР. КОМПЛЕКСТІК ПОТЕНЦИАЛДЫҢ МЕХАНИКА МЕН ФИЗИКАДА ҚОЛДАНЫЛУЫ

5.1 Функциялардың шегермелері

z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған айрықша нүктесі болсын. Олай болса z_0 нүктесінің қандай да бір тесік (ойық) аймағында $f(z)$ аналитикалық болады. γ - осы тесік аймақта жатқан және z_0 нүктесі ішінде жататын кез келген оң бағытта жүргізілген тұйық контур болсын.

Анықтама 28. $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі *шегермесі* деп

$$res\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz \tag{56}$$

санын айтамыз. (Басқа белгілеулері: $res[f(z); z_0]$, $\underset{z=z_0}{res} f(z)$).

Лоран қатарының коэффициенттерін анықтайтын (54) формуласы бойынша $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегермесі осы функцияның осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктелуінің негізгі бөлігінің бірінші коэффициентіне тең екендігі шығады, яғни

$$res\, f(z_0) = c_{-1}. \tag{57}$$

Мысал 68: $f(z) = \cos z \sin\frac{1}{z}$ функциясының $z = 0$ айрықша нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

Шешімі: Айрықша нүктені сипаттау үшін, берілген функцияны $z = 0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына синус және косинус функцияларының жіктелулерін пайдаланып жіктейік:

$$f(z) = \cos z \sin\frac{1}{z} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!5!} + \ldots\right)\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{0!3!} + \frac{1}{2!5!} + \frac{1}{4!7!} + \ldots\right)\frac{1}{z^3} + \ldots + .$$

Дұрыс бөлігінің мүшелерінің саны шектеусіз Лоран қатарын алдық.

Демек, $z = 0$ маңызды айрықша нүкте. Онда ізделінді шегерме

$$\underset{z=0}{res}\left(\cos z \sin\frac{1}{z}\right) = c_{-1} = 1 + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}.$$

Мысал 69: $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}\cos z$ функциясының $z = 0$ нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

Шешімі: (57) формуласы бойынша, $f(z)$ функциясының $z = 0$ нүктесіндегі шегермесі $f(z)$ функциясының осы нүкте аймағында Лоран жіктелуіндегі z^{-1} дәрежесінің коэффициентіне тең. $f(z)$ функциясы жұп болғандықтан оның Лоран жіктелуінде z айнымалысының тақ дәрежелері болмайды, яғни олардың коэффициенттері нөлге тең. Олай болса, z^{-1} дәрежесінің коэффициенті

$c_{-1}=0$, демек, $resf(0)=0$.

Теорема 4 мен (57) теңдігінен келесі теореманы аламыз.

Теорема 7. Түзетілетін айрықша нүктедегі шегерме нөлге тең.

Мысал 70: $f(z)=\dfrac{\sin(z^2+4)}{z-2i}$ функциясының айрықша нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

Шешімі: $f(z)$ функциясының айрықша нүктесі $z=2i$. Функцияның осы нүктедегі шегін қарастырайық:

$$\lim_{z\to 2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{\sin(z^2+4)}{z-2i}=\lim_{z\to 2i}\frac{\sin(z^2+4)}{(z-2i)(z+2i)}(z+2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{\sin(z^2+4)}{z^2+4}(z+2i)=1\cdot 4i=4i.$$

Шек тиянақты, олай болса $z=2i$ түзетілетін айрықша нүкте. Онда теорема 7 бойынша, функцияның бұл нүктедегі шегермесі

$$resf(2i)=0.$$

Полюс үшін келесі теоремалар орынды болады.

Теорема 8. Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының n - ші ретті полюсі болса, онда

$$res\, f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{f(z)(z-z_0)^n\right\}. \qquad (58)$$

z_0 қарапайым полюс $(n=1)$ болған жағдайда

$$res\ f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]. \qquad (59)$$

Мысал 71: $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ функциясының айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

Шешімі: $f(z)$ функциясының айрықша нүктелері $z=-1$ және $z=2$. Мұндағы $z=-1$ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін үшінші ретті полюс. Олай болса біз (58) формуласын қолдана аламыз:

$$resf(-1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{(z^2-6z+10)e^z}{(z-2)^3}=-\frac{17}{54e}.$$

$z=2$ - бірінші ретті полюс, сондықтан (59) формуласы бойынша

$$resf(2)=\lim_{z\to 2}\frac{e^z}{(z+1)^3}=\frac{e^2}{27}.$$

Теорема 9. Егер $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің аймағында $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ екі аналитикалық функцияларының қатынасы

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

түрінде берілсе, сондай-ақ $\varphi(z_0)\neq 0$, ал $\psi(z_0)=0$ және $\psi'(z_0)\neq 0$, яғни z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының қарапайым полюсі болса, онда

$$resf(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (60)$$

Мысал 72: $f(z)=\dfrac{e^z}{e^z-1}$ функциясының айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

Шешімі: $f(z)=\dfrac{e^z}{e^z-1}$ функциясының айрықша нүктелері $e^z-1=0$ теңдеуінің түбірлері $z=Ln1=\ln 1+i2\pi k=i2\pi k,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,...$ нүктелері болады. $f(z)$ функциясы $\varphi(z)=e^z$ және $\psi(z)=e^z-1$ функциялары арқылы $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ түрінде жазылады. Олай болса, егер $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ функциялары $z=i2\pi k$ нүктесінде теорема 9 шарттарын қанағаттандырса, онда $f(z)$ функциясының $z=i2\pi k$ нүктесіндегі шегермесін (60) формуласы бойынша табуға болады.

Теорема 9 шарттарының орындалуын тексерейік:

$$\varphi(i2\pi k)=e^{i2\pi k}=\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k=1\neq 0,$$

$$\psi(i2\pi k)=e^{i2\pi k}-1=1-1=0,$$

$$\psi'(z)=\left(e^z-1\right)'=e^z\Rightarrow \psi'(i2\pi k)=e^{i2\pi k}=1\neq 0.$$

Теорема 9 шарттары орынды. Онда (60) формуласы бойынша

$$res\ f(i2\pi k)=\frac{\varphi(i2\pi k)}{\psi'(i2\pi k)}=\frac{1}{1}=1.$$

Егер $f(z)$ функциясы z_0 нүктесі реті бірден жоғары нөлдері болатын $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ аналитикалық функциялары арқылы $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ түрінде жазылса, онда $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегермесін $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ функцияларын олардың z_0 нүктесінің аймағындағы Тейлор қатарына жіктелулерімен ауыстыру арқылы табуға болады.

Мысал 73: $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$ функциясының $z=0$ нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

Шешімі: Бөлшектің алымы да, бөлімі де аналитикалық функциялар және $z=0$ нүктесі бөлшектің алымының да, бөлімінің де нөлі болады. Бөлшектің алымы мен бөлімін Тейлор қатарына

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...$$

жіктелуін қолданып жіктейміз:

$$f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}=\frac{3z-\dfrac{3^3z^3}{3!}+\dfrac{3^5z^5}{5!}-...-3\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-...\right)}{\left(-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-...\right)\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+...\right)}=$$

$$=\frac{-\frac{3^3-3}{3!}z^3+\frac{3^5-3}{5!}z^5-\ldots}{z^4\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)}=\frac{z^3\left(-\frac{3^3-3}{3!}+\frac{3^5-3}{5!}z^2-\ldots\right)}{z^4\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{-\frac{3^3-3}{3!}+\frac{3^5-3}{5!}z^2-\ldots}{z\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)}.$$

Сонымен

$$f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}=\frac{\dfrac{-\frac{3^3-3}{3!}+\frac{3^5-3}{5!}z^2-\ldots}{\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)}}{z}=\frac{\varphi(z)}{z}.$$

Сондай-ақ $\varphi(0)\neq 0$ болғандықтан, $z=0$ нүктесі теорема 3 бойынша $f(z)$ функциясының қарапайым полюсі болады, онда (59) формуласы бойынша оның осы нүктедегі шегермесі

$$resf(0)=\lim_{z\to 0}f(z)\cdot z=\lim_{z\to 0}\frac{\varphi(z)}{z}z=\lim_{z\to 0}\varphi(z)=\varphi(0)=\frac{-\frac{3^3-3}{3!}}{-\frac{1}{3!}}=24.$$

Мысал 74: $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ функциясының айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

Шешімі: $f(z)$ функциясының айрықша нүктелері $z=1$ және $z=0$.

$z=1$ айрықша нүктесінде бөлшектің алымы мен бөлімі теорема 9 шарттарын қанағаттандырады, сондықтан (60) формуласы бойынша

$$\underset{z=1}{res}\, f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{-1}\Big|_{z=1}=-e.$$

$z=0$ айрықша нүктесін сипаттау үшін $\varphi(z)=e^{\frac{1}{z}}$ және $\psi(z)=\dfrac{1}{1-z}$ функцияларын осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктейміз:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots.$$

Бұл қатарларды көбейтіп берілген функцияның

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\dots\right)\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\right)\frac{1}{z}+c_{-2}\frac{1}{z^2}+\dots+$$

түріндегі бас бөлігінің мүшелерінің саны шектеусіз Лоран қатарын аламыз. Онда $z=0$ берілген функцияның маңызды айрықша нүктесі болады да $z=0$ нүктесіндегі шегермесі (57) формуласы бойынша табылады:

$$\underset{z=0}{res}\, f(z)=c_{-1}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots.$$

Бұл теңдіктен, $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots=e^1$ екенін ескерсек,

$$\underset{z=0}{res}\, f(z)=e-1$$

теңдігін аламыз.

5.2 Шексіз алыс нүктеге қатысты функцияның шегермесі

Анықтама 29. Егер

$$\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

функциясы $\xi=0$ нүктесінде аналитикалық болса, онда $f(z)$ функциясы $z=\infty$ шексіз алыс нүктесінде *аналитикалық* деп аталады.

Мысал үшін $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ функциясы $z=\infty$ нүктесінде аналитикалық, себебі

$$\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sin\xi$$

функциясы $\xi=0$ нүктесінде аналитикалық болады.

$z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының айрықша нүктесі болып (яғни аналитикалық нүктесі болмаса) және оның қандай да бір $|z|>R$ аймағында $f(z)$ функциясының басқа айрықша нүктелері болмаса, онда $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының *оқшауланған айрықша нүктесі* деп аталады.

Мысал 75: $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ функциясын қарастырайық. $z=z_k=k\pi,\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ нүктелерінде $\sin z=0$ болғандықтан $z_k=k\pi$ нүктелері $f(z)$ функциясы үшін айрықша нүктелер болады.

Сонымен қатар $\varphi(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ функциясы үшін $z=0$ нүктесі айрықша болғандықтан $z=\infty$ нүктесі де $f(z)$ функциясының айрықша нүктесі болады.

$z_k = k\pi,\ (k = 0,\pm1,\pm2,...)$ айрықша нүктелер тізбегінің шегі $\lim_{k\to\infty} z_k = \infty$, онда шектің анықтамасы бойынша, кез келген R оң саны үшін $|z_k| > R$ теңсіздігін қанағаттандыратын z_k нүктесі табылады, яғни $z = \infty$ нүктесінің кез келген $|z| > R$ аймағында z_k айрықша нүктесі бар болады, басқаша айтсақ, $z = \infty$ айрықша нүктесінің өзінен басқа айрықша нүкте болмайтын аймағы жоқ. Олай болса $z = \infty$ айрықша нүктесі $f(z)$ функциясының *оқшауланбаған* айрықша нүктесі болады.

$f(z)$ функцияның $z = \infty$ айрықша нүктесі $\lim_{z\to\infty} f(z)$ шегінің санға тең, шексіздікке тең немесе болмауына сәйкес осы функцияның түзетілетін айрықша нүктесі, полюсі немесе маңызды (елеулі) айрықша нүктесі деп аталады.

Шектеусіз алыс айрықша нүктенің түрінің Лоран жіктелуімен байланысты берілген белгілері тиянақты айрықша нүктелері үшін берілген белгілерден өзгеше болады.

Енді соларға тоқталайық. Бұл арада $f(z)$ функциясының $z = \infty$ *нүктесінің аймағында Лоран жіктелуі* деп $f(z)$ функциясының центрі $z = 0$ нүктесі болатын қандай да бір дөңгелектің сыртында (яғни $|z| > R$ жиынында), мүмкін $z = \infty$ нүктесінің өзін есептемегенде, жинақты болатын z айнымалысының дәрежелері бойынша Лоран жіктелуін айтамыз.

Теорема 10. Егер $f(z)$ функциясының $z = \infty$ шектеусіз алыс нүктесінің аймағындағы Лоран жіктелінуінде z айнымалысының оң дәрежелі мүшелері болмаса, онда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының түзетілетін айрықша нүктесі болады; егер Лоран жіктелінуінде оң дәрежелі мүшелер бар және олардың саны шектеулі болса, онда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болады; егер Лоран жіктелінуінде z айнымалысының оң дәрежелі мүшелер саны шектеусіз болса, онда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды айрықша нүктесі болады.

Анықтама 30. $z = \infty$ нүктесінің қандай да бір аймағында ($z = \infty$ нүктесінің өзін есептемегенде) аналитикалық $f(z)$ функциясының *шексіздіктегі шегермесі* деп

$$res\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)dz\,, \tag{61}$$

санын айтамыз, мұндағы γ^- - аталған аймақта жататын центрі бас нүктеде орналасқан сағат тілі бағытымен (шеңбердің сырты сол жақта болатын бағытпен) жүргізілген шеңбер.

Бұл анықтамадан $f(z)$ функциясының шексіздіктегі шегермесі $f(z)$ функциясының $z = \infty$ нүктесінің аймағында Лоран жіктелуіндегі z^{-1} дәрежесінің қарама-қарсы таңбамен алынған коэффициентіне тең екендігі шығады:

$$res\, f(\infty) = -c_{-1}\,. \tag{62}$$

Мысал 76: $f(z)=\frac{z+1}{z}$ функциясы үшін $f(z)=1+\frac{1}{z}=1+1\cdot z^{-1}$. Бұл өрнекті функцияның шексіз алыс нүктенің $|z|>0$ аймағындағы Лоран жіктелінуі ретінде қарастыруға болады. Бұл жіктелуде z айнымалысының оң дәрежесі жоқ, олай болса $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының түзетілетін айрықша нүктесі. (62) формуласы бойынша, $c_{-1}=1$ болғандықтан

$$res\, f(\infty)=-1 .$$

Келтірілген мысалдан аналитикалық функцияның шексіз алыс түзетілетін айрықша нүктеге қатысты шегермесінің нөлден өзгеше де болатыны шығады (теорема 7 - мен салыстырып көріңіз).

Белгілі e^z, $\sin z$, $\cos z$, shz, chz функцияларының z айнымалысының дәрежелеріне жіктелулерін $z=\infty$ нүктесінің аймағында Лоран жіктелулері ретінде қарастыруға болады. Бұл жіктелулердің әрқайсысында z-тің оң дәрежелі мүшелерінің саны шектеусіз болғандықтан аталған функциялар үшін $z=\infty$ маңызды айрықша нүкте болады.

Теорема 11. Егер $f(z)$ функциясының кеңейтілген комплекс жазықтықтағы айрықша нүктелерінің саны шектеулі болса, онда оның осы нүктелердегі шегермелерінің $z=\infty$ нүктесіндегі шегермесін қоса есептегендегі қосындысы нөлге тең.

Сонымен $a_1, a_2, a_3,..., a_n$ берілген $f(z)$ функциясының тиянақты айрықша нүктелері болса, онда

$$res\, f(\infty)+\sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k)=0$$

немесе

$$\sum_{k=1}^{n} res f(a_k)=-res f(\infty). \tag{63}$$

5.3 Шегерменің тұйық контур бойынша интегралды есептеуге қолданылуы

Шегермелер туралы Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы D облысының C шекарасында және облыстың $z_1, z_2,..., z_n$ айрықша нүктелерінен басқа барлық ішкі нүктелерінде аналитикалық болса, онда

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k) \tag{64}$$

теңдігі орынды болады**.**

Мысал 77: $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz$ интегралын есептеңіз.

Шешімі: $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2+z}$ функциясы $|z|=4$ шеңберінде және осы шеңбермен шектелген $|z|<4$ облысының $z=0$ және $z=-1$ нүктелерінен басқа барлық нүктелерінде аналитикалық болады.

Онда, шегермелер туралы Коши теоремасы бойынша,

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz = 2\pi i\left(res\ f(0) + res\ f(-1)\right).$$

Теңдіктің оң жағындағы шегермелерді есептейік.

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z^2+z}=1$, яғни $z=0$ нүктесі $f(z)$ функциясының түзетілетін айрықша нүктесі. Олай болса $res\, f(0)=0$.

$z=-1$ нүктесі – бірінші ретті полюс. Олай болса

$$res\, f(-1) = \lim_{z\to -1}\left\{\frac{e^z-1}{z(z+1)}(z+1)\right\} = 1-e^{-1}.$$

Сонымен

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz = 2\pi i\left(0+\left(1-e^{-1}\right)\right) = 2\pi i\left(1-e^{-1}\right).$$

Мысал 78: $\int\limits_{|z|=2} tgz\,dz$ интегралын есептеңіз.

Шешімі: $f(z)=tgz$ функциясы $|z|=2$ шеңберінде және осы шеңбермен шектелген $|z|<2$ облысының қарапайым полюстер болатын $z=\frac{\pi}{2}$ және $z=-\frac{\pi}{2}$ нүктелерінен басқа барлық нүктелерінде аналитикалық болады. $f(z)=tgz$ функциясының басқа барлық $z_k = \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=1,\pm 2,\pm 3,...)$ айрықша нүктелері $|z|\le 2$ тұйық облысынан тыс орналасқан $(|z_k|>2)$, сол себепті олар есепке алынбайды. (60) формуласы бойынша

$$res\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1,$$

$$res\, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}} = -1.$$

Шегермелер туралы Коши теоремасы бойынша

$$\int\limits_{|z|=2} tgzdz = res\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) + res\, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i\left(-1+(-1)\right) = -4\pi i.$$

Мысал 79: $\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$ интегралын есептеңіз.

Шешімі: $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ функциясы $|z-i|<\frac{3}{2}$ облысында $z=i$ - бірінші ретті полюс пен $z=-1$ - маңызды айрықша нүктесіне ие болады. (59) формуласы бойынша

$$res\, f(i) = \left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{\left(z^2+1\right)'}\right|_{z=i} = \left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

$z=0$ нүктесіндегі шегермені $f(z)$ функциясының $z=0$ нүктесінің аймағындағы Лоран қатарына жіктелуін пайдаланып есептеуге болады. Бірақ берілген жағдайда Лоран қатарын табудың қажеттілігі жоқ: $f(z)$ функциясы жұп, сондықтан Лоран жіктелінуі z пен $\frac{1}{z}$ - дің тек жұп дәрежелерінен тұрады, яғни $c_{-1}=0$ болады. Онда (57) формуласы бойынша

$$res\, f(0)=0\,.$$

Шегермелер туралы Коши теоремасы бойынша

$$\int\limits_{|z-i|=3/2}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz=2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{2i}+0\right)=\frac{\pi}{e}\,.$$

Мысал 80: $\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$ интегралын есептеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы функциясының $|z|\le 2$ тұйық дөңгелегінде $z=1$ және $z=0$ екі айрықша нүктелері болады. $z=1$ нүктесінің қарапайым полюс болатынын көрсету қиын емес, олай болса (60) формуласы бойынша

$$\underset{z=1}{res}\left(\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right)=\left.\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)'}\right|_{z=1}=\sin 1\,.$$

$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$ функциясының $z=0$ айрықша нүктесіндегі шегермесін анықтау үшін оның осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктелуін пайдаланамыз.

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}=-\left(1+z+z^2+\ldots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=$$

$$=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)\frac{1}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\ldots+,\quad c_{-k}\neq 0,\, k=2,3,\ldots.$$

(57) формуласы бойынша

$$\underset{z=0}{res}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}=c_{-1}=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)=-\sin 1\,.$$

(60) формуласы бойынша

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz=2\pi i(\sin 1-\sin 1)=0\,.$$

Шегермелер туралы Коши теоремасы мен (64), (63), және (62) теңдіктерінен, егер $|z|=R$ шеңберінің сыртында $f(z)$ функциясының $z=\infty$ нүктесінен басқа айрықша нүктесі жоқ болса

$$\oint\limits_{|z|=R}f(z)dz=-2\pi i\,res\,f(\infty)=c_{-1} \qquad (65)$$

болатыны шығады.

Мысал 81: $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^4}$ интегралын есептеңіз.

Шешімі: $z^4+1=0$ теңдеуінің түбірлері интеграл астындағы $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$ функциясының айрықша нүктелері болады. Теңдеудің төрт түбірі бар. Олар z_1, z_2, z_3, z_4 сандары болсын. Бұл түбірлер, модульдері бірге тең болғандықтан $|z|=2$ шеңберінің ішінде жатады.

Енді $z=\infty$ нүктесін қарастырайық. $f\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}}$ функциясы $z=0$ нүктесінде аналитикалық емес ($z=0$ нүктесінде анықталмаған), онда, анықтама 28 бойынша, $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының айрықша нүктесі. Сонымен $|z|=2$ шеңберінің сыртында $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$ функциясының $z=\infty$ нүктесінен басқа айрықша нүктесі жоқ болып шықты. Олай болса (65) формуласын қолдануға болады:

$$I=-2\pi i\, res\, f(\infty)=c_{-1}.$$

$f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$ функциясы шексіз алыс нүктенің аймағында Лоран қатарына төмендегіше жіктелінеді:

$$f(z)=\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{z^4}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}}=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^8}+\frac{1}{z^{12}}-\ldots .$$

Бұдан $c_{-1}=0$ болатыны шығады да, біз

$$I=c_{-1}=0$$

теңдігін аламыз.

Мысал 82: $I=\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}dz$ интегралын есептеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(z)=\dfrac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}$ функциясы $|z|=3$ шеңберінің ішінде жататын еселі полюстер болатын бес айрықша нүктеге ие болады. Сондықтан, Кошидің шегермелер туралы теоремасында берілген (64) формуласын қолдану ұзақ есептеулерге әкелетіндіктен, берілген интегралды (65) теңдігін қолданып есептеу қолайлы болады. $f(z)$ функциясын төмендегі түрде жазып аламыз:

$$f(z)=\frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}=\frac{z^{17}}{z^6\left(1+\dfrac{2}{z^2}\right)^3\left(1+\dfrac{3}{z^3}\right)^4z^{12}}=\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{z^2}\right)^3\left(1+\dfrac{3}{z^3}\right)^4}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{z^2}}\right)^3\left(\frac{1}{1+\dfrac{3}{z^3}}\right)^4$$

$z=\infty$ шексіз алыс нүктесінің $|z|>3$ аймағында $\left|\dfrac{2}{z^2}\right|<1$ және $\left|\dfrac{3}{z^3}\right|<1$ болғандықтан,

$\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{z^2}}$ және $\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{z^3}}$ бөлшектерін

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots, \quad |t| < 1$$

жіктелуін қолданып жіктеуге болады:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z^2} + \left(\frac{2}{z^2}\right)^2 - \ldots\right)^3 \left(1 - \frac{3}{z^3} + \left(\frac{3}{z^3}\right)^2 - \ldots\right)^4.$$

Бұл теңдіктен $f(z)$ функциясының Лоран жіктелуінің негізгі бөлігінің бірінші мүшесі $\frac{1}{z}$ болатыны шығады. Олай болса $C_{-1} = 1$. Бұл шаманы (65) теңдігіне қойсақ

$$I = 2\pi i$$

теңдігін аламыз.

5.4 Рационал функциялардың интегралдары

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ түріндегі интегралды қарастырамыз, мұндағы $P_m(x), Q_n(x)$ - x нақты айнымалысының, сәйкесінше, *m* және *n* дәрежелі көпмүшеліктері. Мұндай интегралды есептеуде келесі тұжырымды қолданған қолайлы болады.

Егер кез келген x үшін $Q_n(x) \neq 0$ және $n \geq m + 2$, яғни бөлімінің дәрежесі алымының дәрежесінен тым болмаса екі бірлікке жоғары болса, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i \sigma, \tag{66}$$

мұндағы σ дегеніміз $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ комплекс айнымылылы функциясының үстіңгі жартыжазықтықта орналасқан барлық полюстеріндегі шегермелерінің қосындысы.

Мысал 83: $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}, \quad (a > 0)$ интегралын есептеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(x) = \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$ функциясы жұп, онда

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$$

болады. Ox нақты өсінде, яғни $z = x$ жағдайында $f(x)$ функциясына тең болатын $f(z) = \frac{z^2}{\left(z^2 + a^2\right)^2}$ комплекс айнымалы функциясын енгізелік. $f(z)$ функциясы үстіңгі жартыжазықтықта орналасқан $z = ai$ нүктесінде екінші ретті полюске ие болады. Осы полюске қатысты $f(z)$ функциясының шегермесі

$$res\, f(ai) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[f(z)(z-ai)^2\right] = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right] = \lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

(66) формуласын қолданып

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2}2\pi i\frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}$$

болатынын аламыз.

2. $\int_0^\infty R(x)\cos\lambda x dx$, $\int_0^\infty R(x)\sin\lambda x dx$

түріндегі интегралдар берілсін, мұндағы $R(x)$ - дұрыс рационал бөлшек, λ - кез келген оң сан.

Интегралдың бұл түрін есептеуде Жорданның келесі теоремасын қолдану қолайлы.

Теорема 12. $g(z)$ функциясы үстіңгі жартыжазықтықтың ($0 < \arg z < \pi$) санаулы ғана айрықша нүктелерінен басқа нүктелерінде аналитикалық болып және осы жартыжазықтықта $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ болса, онда кез келген λ оң саны үшін

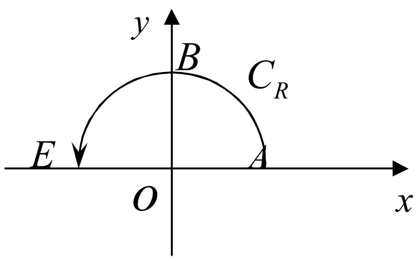
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0, \tag{67}$$

мұнда C_R үстіңгі жартыжазықтықта жатқан центрі *0*, радиусы *R* жарты шеңбер (19-сурет).

Мысал 84: $\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx, \quad a>0, k>0$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}$ көмекші комплекс айнымалы функциясын енгізелік.

Егер $z = x$ болса, онда $\operatorname{Im} f(z)$ интеграл астындағы $\varphi(x) = \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}$ функциясына тең болады. 19-суретте көрсетілген контурды қарастырайық.



19-сурет

Егер $R > |k|$, яғни R жеткілікті үлкен болса, онда $g(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$ функциясы үшін C_R контурында

$$|g(z)| = \left|\frac{z}{z^2+k^2}\right| = \frac{|z|}{|z^2+k^2|} = \frac{R}{|z^2+k^2|} \le \big|\ |a+b| \ge ||a|-|b||\ \big| \le \frac{R}{||z^2|-|k^2||} = \frac{R}{|R^2-k^2|} = \frac{R}{R^2-k^2},$$

теңсіздігі орынды болады. Бұл теңсіздіктен, $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{R}{R^2-k^2}=0$ болғандықтан, $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$ теңдігі шығады. Демек, Жордан леммасы бойынша

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz = 0 \qquad (68)$$

Шегермелер туралы теорема бойынша кез келген $R>k$ үшін

$$\int_{ABEA}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ik}\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\right] = 2\pi i\left[\frac{\frac{ze^{iz}}{z+ik}}{(z-ik)'}\right]\Bigg|_{z=ik} = 2\pi i\frac{1}{2}e^{-ak} = \pi i e^{-ak}.$$

Сонымен қатар

$$\int_{ABEA}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz = \int_{-R}^{+R}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx + \int_{C_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz.$$

Соңғы екі теңдіктен

$$\int_{-R}^{+R}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx + \int_{C_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz = i\pi e^{-ak}$$

теңдігін аламыз.

Бұл теңдікте $R\to\infty$ жағдайында, (68) қатынасын ескере отырып, шекке көшеміз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx = \pi i e^{-ak}.$$

Оң және сол жақтарының нақты бөліктерін теңестіреміз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \pi e^{-ak}.$$

Интеграл астындағы функцияның жұптығын ескерсек

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ak}$$

болатыны шығады.

5.5 Сұйық механикасында қолданылуы

Анықтама 31. Сығылмайтын сұйықтың қалыптасқан жазық құйынсыз ағыны *комплекстік потенциал* немесе *ағынның сипаттамалық функциясы* деп аталатын

$$w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

аналитикалық функциямен сипатталады. φ - *потенциалдық функция*, ψ - *ағын функциясы* деп аталады. $\varphi = const$ - эквипотенциалдық сызықтар, $\psi = const$ - ағын сызықтары.

V ағын жылдамдығының векторы $w(z)$ функциясымен

$$\mathbf{V} = Ve^{i\alpha} = V_x + iV_y = \overline{w'(z)},$$
$$V = |\mathbf{V}| = |w'(z)|, \quad \alpha = -\arg w'(z),$$
$$\mathbf{V} = grad\varphi$$

қатынастарымен байланысады.

$$\Gamma = \int_C V_x dx + V_y dy = \int_C d\varphi \tag{69}$$

қисық сызықты интегралы **V** векторының C контуры бойынша *циркуляциясы* деп аталады (C - оң бағытта жүргізілген тұйық контур). Циркуляция сұйық ағынының құйындық дәрежесін сипаттайды.

$$Q = \int_C \left(-V_y dx + V_x dy\right) = \int_C d\psi \tag{70}$$

қисық сызықты интегралы **V** векторының C контуры арқылы *ағыны* деп аталады. Ағын C контуры арқылы уақыт бірлігінде өтетін сұйық мөлшерін анықтайды.

(69) және (70) формулаларын біріктіре отырып

$$\Gamma + iQ = \int_C w'(z)dz$$

теңдігін аламыз.

Егер $w'(z)$ тұйық C контурының ішінде анықталған және ондағы айрықша нүктелерінің саны ақырлы болса, онда

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum res\, w'(z)$$

(қосынды айрықша нүктелер бойынша құрылады).

Егер a - $w'(z)$ функциясының полюсі болса, онда $w(z)$ функциясы a нүктесінің аймағында

$$w(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

түрінде жіктелінеді. $\frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln(z-a)$ мүшесі (Γ, Q - нақты сандар) a нүктесінде $(a; Q, \Gamma)$ түрінде белгіленетін Q молшылықты және Γ интенсивті құйын көзін (Егер $Q = 0$ болса, онда $(a; \Gamma)$ құйынын аламыз. Егер $\Gamma = 0$ болса, онда $(a; Q)$ көзін аламыз. Егер көздің интенсивтілігі $Q < 0$ болса, онда кері ағу орын алады дейміз), $\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}$ мүшесі - $(a; p)$ түрінде белгіленетін p сәтіндегі диполін (p - комплекс сан; p - радиус векторы a нүктесінен тоқ желісі бағытында өтетін диполь өсінің бағытын анықтайды), қалған $\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ мүшелері a нүктесідегі $2k$ ретті мультипольдерді анықтайды.

Сәйкесінше шексіздікте

$$w(z) = c_n z^n + \ldots + \frac{p}{2\pi}z + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots$$

жіктелінуі орын алса, онда $\frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln z$ мүшесі шексіздікте Q молшылықты және Γ интенсивті құйын көзін, ал $\frac{p}{2\pi}z$ мүшесі - p сәтті диполь (шексіздікте тоқ желісінің бағыты **p** радиус-векторы бағытымен бағыттас), ал қалған $c_k z^k$ мүшелері $2k$ ретті мультипольдерді анықтайды.

$\mathbf{V} = 0$, яғни $w'(z) = 0$ болатын нүктелер *ағынның кризистік нүктелері* деп аталады: бұл нүктелерден тоқ сызығы мен эквипотенциалдық сызықтар кезектесіп шығады. Егер кризистік нүкте $n-1$ ретті туындының нөлі болса, онда бұл сызықтар өзара $\frac{\pi}{2n}$ бұрыштар жасайды. Мұндай сызықтар тармақталынуы шексіздікте де болуы мүмкін.

Мысал 85: Сұйықтың қозғалысы $w(z) = z^2$ комплекстік потенциалымен берілген. Жылдамдықтар потенциалын, ағын функциясын, деңгейлік сызығын, ағын сызығын, V жылдамдық векторының шамасы мен бағытын, жылдамдық векторларының $0x$ және $0y$ координат өстеріне V_x және V_y проекцияларын табыңыз.

Шешімі: $z = x + iy$ деп алып

$$w(z) = \left(x^2 - y^2\right) + i2xy$$

болатынын аламыз. Онда жылдамдықтар потенциалы $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ және ағын функциясы $\psi(x, y) = 2xy$, $\varphi(x, y) = const$ деңгейлік сызығы $x^2 - y^2 = const$ гиперболасы $\psi(x, y) = const$ ағын сызығы $2xy = const$ гиперболасы болады.

Жылдамдық векторының шамасы

$$V = \left|\overline{w'(z)}\right| = \left|\overline{\left(z^2\right)'}\right| = \left|2\bar{z}\right| = 2\sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Жылдамдық векторының бағыты

$$\alpha = -\arg w'(z) = -\arg 2z = -arctg\frac{y}{x}$$

бұрышымен анықталады.

$0x$ және $0y$ координат өстеріне жылдамдық векторларының проекциялары

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x, \quad V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y\ .$$

Сұйықтың тыныштық нүктесі, яғни V=0 болатын нүкте O(0,0) координаталардың бас нүктесі болады.

Мысал 86: Сұйықтың қозғалысы $w(z) = \ln sh\pi z$ комплекстік потенциалымен берілген. $2|z| = 3$ шеңбері арқылы өтетін Γ ағын шамасын және шеңбер бойындағы Q циркуляциясын табыңыз.

Шешімі: Комплекстік потенциалдың туындысын табамыз:

$$w'(z) = \pi\, cth\pi z\ .$$

$\Gamma + iQ = \int\limits_C w'(z)dz$ формуласын қолдансақ

$$Q + i\Gamma = \pi \int\limits_{|z|=3/2} cth\,\pi z dz = \pi \int\limits_{|z|=3/2} \frac{ch\,\pi z}{sh\,\pi z} dz$$

теңдігін аламыз.

Интеграл астындағы функцияның $2|z| = 3$ шеңберінің ішінде үш жай полюстері $z_1 = -i,\quad z_2 = 0,\quad z_3 = i$ бар болады. Оның осы полюстердегі шегермесін табамыз.

$$res\, w'(z_k) = \pi \frac{1}{\pi} = 1, \quad k = 1,2,3.$$

Коши теоремасы бойынша

$$\int\limits_{|z|=3/2} cth\,\pi z dz = 6\pi i.$$

Онда

$$Q + i\Gamma = 6\pi^2 i = 0 + i\,6\pi^2.$$

Демек, циркуляция $Q = 0$, ағын $\Gamma = 6\pi^2$.

Мысал 87: Эквипотенциалдық сызықтарының теңдеуі $chx \sin y + 2xy = c$ берілген, мұндағы $c = const$. Сұйықтың ағынының $w(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын $w(z)$ комплекстік потенциалын табыңыз.

Шешімі: Есептің шартынан $\varphi(x, y)$ потенциалдық функциясы $w(z)$ аналитикалық функциясының, яғни ізделінді комплекстік потенциалдың нақты бөлігі

$$\varphi = 2xy + chx \sin y$$

екендігі шығады да, есеп $w(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

аналитикалық функциясын оның белгілі $\varphi(x, y)$ нақты бөлігі бойынша тұрғызу есебіне келеді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2y + shx \sin y.$$

Коши-Риман шарттарының бірі бойынша $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, онда

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y + shx \sin y.$$

Теңдікті y айнымалысы бойынша интегралдаймыз

$$\psi(x, y) = y^2 - shx \cos y + f(x),$$

мұндағы $f(x)$ - кез келген дифференциалданатын функция. $\psi(x, y)$ функциясын x бойынша дифференциалдап алып Коши-Риманның $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ шартын қолдансақ

$$-chx\cos y + f'(x) = -2x - chx\cos y \;\Leftrightarrow\; f'(x) = -2x$$

теңдеуін аламыз.

Бұдан $f(x) = -x^2 + c,\quad c = const$ болатыны шығады. $f(x)$ функциясының алынған мәнін теңдікке қоямыз:

$$\psi(x, y) = y^2 - x^2 - shx\cos y + c\,.$$

Сонымен

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = 2xy + chx\sin y + i\left(y^2 - x^2 - shx\cos y\right) + ic\,.$$

$w(0) = 0$ шарты бойынша $0 + i0 = c,$ яғни $c = 0$.

Олай болса ізделінді комплекстік потенциал

$$w(z) = 2xy + chx\sin y + i\left(y^2 - x^2 - shx\cos y\right)$$

немесе

$$w(z) = -i\left(z^2 + shz\right).$$

5.6 Электр статикасында қолданылуы

$\mathbf{E}(x, y) = E_x(x, y)\boldsymbol{i} + E_x(x, y)\boldsymbol{j}$ жазық электр статикалық өрісі, яғни кернеулік вектор өрісі берілсін. Бұл векторлық өрісті $E = E_x + iE_y$ комплекстік түрінде жазуға болады. Өріс нақты бөлігі мен жорамал бөліктері $E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},\quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ шарттарын қанағаттандыратын $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитикалық функциясымен толық сипатталады. $w(z)$ функциясы **E** өрісінің *комплекстік потенциалы*, u - күш функциясы, ал v - потенциалдық функциясы, $v = const$ - эквипотенциалдық сызықтары, $u = const$ - күш сызықтары деп аталады.

Аталған шарттардан келесі теңдіктерді аламыз:

$\mathbf{E} = -grad v$ немесе $E = -i\overline{w'(z)},\quad |E| = |w'(z)|,\quad ArgE = -\frac{\pi}{2} - Argw'(z)$.

Кернеулік векторының С тұйық контуры арқылы ағыны

$$N = \oint_C E_n ds$$

қисық сызық интегралымен анықталады, мұндағы E_n **- E** векторының С контурына (x,y) нүктесінде жүргізілген нормальдің оң бағытына түсірілген проекциясы. Ағын С контурының ішінде орналасқан зарядтардың алгебралық қосындысы мен 2π санынын көбейтіндісіне тең.

Зарядттарды анықтауда келесі тұжырымды қолданған қолайлы болады.

Егер a - $w'(z)$ функциясының полюсі болып және w функциясы a нүктесінің аймағында

$$w(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{pi}{z-a} + 2qi\ln\frac{1}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots, \tag{71}$$

түрінде жіктелсе, онда қатардың $2qi\ln\frac{1}{z-a}$ мүшесі a нүктесіндегі $(a;2q)$ түрінде белгіленетін $\rho=2q$ шамалы жазық нүктелік зарядын (кеңістікте z жазықтығына a нүктесінде перпендикуляр түзусызықты өткізгіштің бірлік ұзындығына келетін q заряды келеді); $\frac{pi}{z-a}$ мүшесі $(a;p)$ түрінде белгіленетін a нүктесіндегі p мезетті диполін (p - комплекс сан, ал **p** векторы диполь өсінің бағытын анықтайды); қалған $\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ $(k=2,\ldots,n)$ мүшелері a нүктесіндегі $2k$ ретті мультипольдерді анықтайды.

Сәйкесінше шексіздікте

$$w(z)=c_nz^n+\ldots+piz+2qi\ln z+c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\ldots,$$

жіктелінуі орынды болса, онда $2qi\ln z$ мүшесі шексіздіктегі $\rho=2q$ шамалы $(\infty;2q)$ жазық нүктелік зарядын, ал piz мүшесі p сәтті $(\infty;p)$ диполін анықтайды.

Мысал 88: Берілген комплекс потенциал бойынша күш және потенциал функцияларын, өріс кернеуін, жазық нүктелік зарядын және диполін анықтаңыз, және де күш сызықтары мен эквопотенциалдық сызықтарды тұрғызыңыз.

1) $w=cz\ (c=\alpha+i\beta)$

Шешімі: $w=cz$ потенциалын $w=u+iv$ алгебралық түрінде жазып аламыз:

$$w=cz=(\alpha+i\beta)(x+iy)=(\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y),$$

$u(x,y)=\alpha x-\beta y$ - күш функциясы,

$v(x,y)=\beta x+\alpha y$ - потенциал функциясы.

Өріс кернеуі $E=-i\overline{w'(z)}$ теңдігімен анықталады.

$$w'(z)=(cz)'=c,$$

$$E=-i\overline{w'(z)}=-i\bar{c}.$$

$w=cz$ функциясы кез келген $z\neq\infty$ нүктесінде аналитикалық, яғни оның полюсі (айрықша нүктесі) жоқ. Олай болса жазықтықта нүктелік заряд, нүктелік диполь және нүктелік мультиполь жоқ.

$w=cz$ функциясы $z=\infty$ шексіз аласталған нүктесінің аймағындағы жіктелуін жазамыз:

$$w=cz=\ldots+0+(-ic)iz+0+\ldots.$$

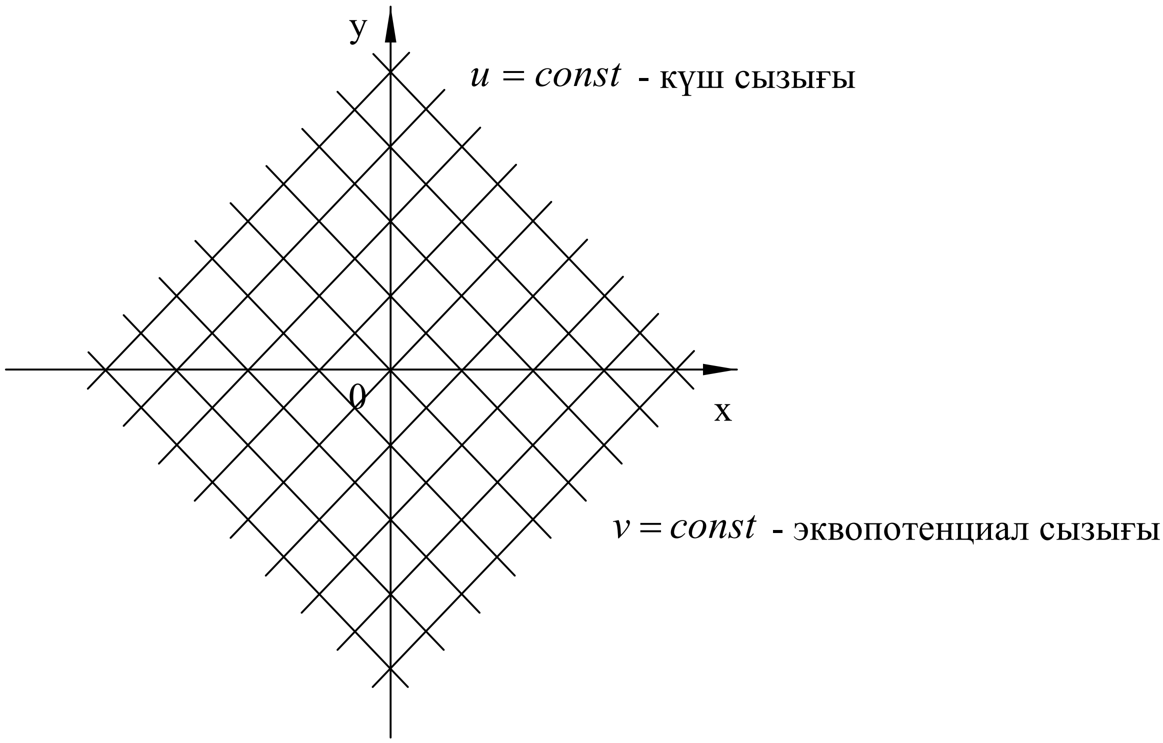
Бұдан өрістің $z=\infty$ шексіз аласталған нүктесінде $p=-ic$ мезетті диполі бар екені шығады.

Күш және эквипотенциялдық сызықтар, сәйкесінше, $u=const$ және $v=const$ теңдеулерімен анықталады:

$\alpha x-\beta y=const$ - күш сызықтары - түзулер,

$\beta x+\alpha y=const$ - эквипотенциялдық сызықтар - түзулер.

Күш түзулері мен эквипотенциялдық түзулері, олардың сәйкес коэффициенттерінің көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең $(\alpha\beta - \beta\alpha = 0)$ болғандықтан, өзара перпендикуляр болады (20-сурет).



20-сурет

Жауабы: $u(x, y) = \alpha x - \beta y$ - күш функциясы; $v(x, y) = \beta x + \alpha y$ - потенциал функциясы; $\mathbf{E} = -i\overline{w'(z)}$ - өріс кернеуі; $(\infty; -ic)$ - диполь; $\alpha x - \beta y = const$ - күш сызықтары; $\beta x + \alpha y = const$ - эквипотенциялдық сызықтар.

$w(z)$ функциясының (71) қатарына жіктелінуі

$$w(z) = 2qi \ln \frac{1}{z} = 2qi \ln \frac{1}{z - 0} + 0 + \ldots$$

түрінде жазылады. Олай болса $(0; 2q)$ - нүктелік заряд. $w(z)$ функциясының шексіздікте қатарға жіктелінуі

$$w(z) = 2qi \ln \frac{1}{z} = -2qi \ln z = -2qi \ln z + 0 + \ldots$$

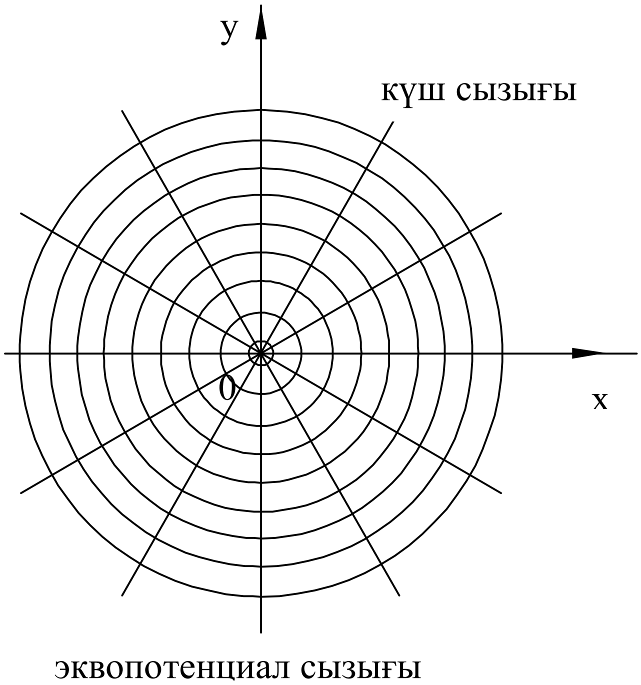
түрінде жазылады. Олай болса $(\infty; -2q)$ - шексіздіктегі нүктелік заряд.

Күш сызықтары:

$2q \arg z = const$ - бас нүктеден шығатын сәулелер.

Эквопотенциал сызықтары:

$2q \ln \dfrac{1}{|z|} = const \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} = e^{\frac{const}{2q}} \Leftrightarrow |z| = e^{\frac{const}{2q}}$ - центрлі бас нүктеде жатқан концентрлі шеңберлер (21-сурет).



21-сурет

Мысал 89: Күш сызықтары

$$x^2 - y^2 + 2xy + x = c \quad (c - const)$$

теңдеуімен берілген электр статикалық өрісінің сипаттамасын беретін комплекстік потенциалды құрыңыз.

Шешімі: Электр статикалық өрісі комплекс потенциал деп аталатын

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

аналитикалық функциясымен сипатталады.

Екіншіден күш сызықтары

$$u(x, y) = c \quad (c - const)$$

теңдеуімен беріледі. Олай болса, есептің шартында берілген теңдеу негізінде

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + x$$

болатынын аламыз, яғни $w = x^2 - y^2 + 2xy + x + iv(x, y)$.

Сонымен есеп нақты бөлігі $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + x$ функциясы болатын $w = u + iv$ аналитикалық функциясының $v(x, y)$ жорамал бөлігін табу есебіне келеді. Мұндай есептің шығарылу жолы 3.1 бөлімінде қарастырылған болатын (Мысал 40).

$v(x, y)$ функциясын 3.1 бөліміндегі 40-мысалда келтірілген жолмен табамыз:

$$v(x, y) = -x^2 + y^2 + 2xy + y + c.$$

Сонымен

$$w = x^2 - y^2 + 2xy + x + i(-x^2 + y^2 + 2xy + y + c).$$

Егер $w(z) = u + iv$ функциясын $\mathbf{E} = -i\overline{w'(z)}$ электр статикасы өрісінің комплекс потенциалы және бірмезетте $\mathbf{V} = \overline{w'(z)}$ жылдамдықты сұйық ағыны деп қарастырсақ, төмендегі электрогидродинамикалық баламасына келеміз:

	Сұйық ағыны	Электр статикалық өріс
u	Потенциал функциясы	Күш функциясы
$u = const$	Эквипотенциал сызықтары	Күш сызықтары
v	Ағын функциясы (көпмәнді болуы мүмкін)	Потенциал функциясы (үнемі бірмәнді)
$v = const$	Ағын сызығы	Эквипотенциал сызықтары
$v_2 - v_1$	Сұйықтың жұмсалынуы	Потенциалдар айырмасы
$\oint du$	Γ - циркуляция	N - ағын
-	$(a; \Gamma)$ құйыны	$(a; 2q)$ нүктелік заряды: $q = \frac{\Gamma}{4\pi} = \frac{N}{4\pi}$
-	p мезетті диполь	$\frac{p}{2\pi i}$ мезетті диполь
-	Құйындары мен диполдері берілген ағын	Зарядтары, диполдері және эквипотенциалдық шекаралық сызықтары берілген өріс

5.7 Жылу таралуында қолданылуы

Анықтама 32. Дене ішінде жылудың стационар таралуы туралы жазық есеп жылу өрісінің комплекстік потенциалы деп аталатын $w(z) = u + iv$ (u - жылу) аналитикалық функциясымен сипатталады. $\mathbf{Q} = -k\ gradu\ = -k\,\overline{w'(z)}$ (k - жылуөткізгіштік коэффициенті, тұрақты деп қарастырамыз) *жылу ағынының векторы* деп аталады.

C контуры арқылы өтетін жылу ағыны

$$\int_C Q_n ds = -k\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = -k\int_C dv$$

қисық сызықты интегралымен анықталады.

(n - оң бағытты C тұйық контурының сыртқы нормалі). u бірмәнді функция болғандықтан C тұйық контуры үшін жылу ағыны

$$ik\int_C w'(z)dz$$

санына тең.

Егер a нүктесінің аймағында

$$w(z) = \left[\ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots \right] + \frac{q}{2\pi k}\ln\frac{1}{z-a}$$

жіктелінуі орынды болса, онда $\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{1}{z-a}$ мүшесі a нүктесінде q молшылықты $(a; q)$ көзін, ал $\frac{c_{-1}}{z-a}$ мүшесі a нүктесіндегі дублетті анықтайды.

Сұйық ағыны, электр статикалық өріс және жылу таратылуы үшін келесі балама орын алады:

	Жылу өрісі	Сұйық ағыны	Электр статикалық өріс
Комплекстік потенциал	$w(z)=u+iv$	$w(z)=u+iv$	$iw(z)=-v+iu$
Өріс векторы	$\mathbf{Q}=-k\ grad\, u=-k\overline{w'(z)}$	$\mathbf{V}=grad\, u=\overline{w'(z)}$	$\mathbf{E}=-grad\ u=\overline{w'(z)}$
u	Жылу	Потенциал функциясы	Күш функциясы
$u=const$	Изотермалар	Эквипотенциал сызықтары	Күш сызықтары
v	Ағын функциясы	Ағын функциясы	Потенциал функциясы
$v=const$	Ағын сызығы	Ағын сызығы	Эквипотенциал сызықтары
	$(a;q)$ көзі	$\left(a;\dfrac{-q}{k}\right)$ көзі	$\left(a;\dfrac{q}{2\pi k}\right)$ нүктелік заряд
	Дублет	Диполь	Диполь
	Көздері, дублеттері және изотермалық шекаралық контурлары берілген жылу өрісі	Құйындары мен дипольдері берілген ағын	Зарядтары, диполдері және эквипотенциалдық шекаралық сызықтары берілген өріс

5.8 Есептер

№1. Келесі шегермелерді есептеңіз:

1) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}, \quad n=1,2,...;$

2) $\underset{z=0}{res}\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z};$

3) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z^{n-2}}{sh^n z}, \quad n=2,3,...;$

4) $\underset{z=0}{res}\dfrac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2};$

5) $\underset{z=0}{res}\dfrac{(1-chz)shz}{(1-\cos z)\sin^2 z};$

6) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z^2}{chz-1-\dfrac{z^2}{2}}.$

№2. Келесі функциялардың айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

1) $f(z)=\dfrac{tgz}{z^2-\dfrac{\pi}{4}z};$

2) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)};$

3) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$;

4) $f(z)=\dfrac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$;

5) $f(z)=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$;

6) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$;

7) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)^2}$;

8) $f(z)=\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$;

9) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

10) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$;

11) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$;

12) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$;

13) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$;

14) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$;

15) $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$;

16) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}, n>0$ - бүтін сан;

17) $f(z)=ctg^2 z$;

18) $f(z)=\sin z\cos\dfrac{1}{z}$;

19) $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$;

20) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$;

21) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$;

22) $f(z)=e^{\frac{z^2+1}{z}}$;

23) $f(z)=e^z\sin\dfrac{1}{z}$.

№3. Интегралдарды есептеңіз:

1) $\displaystyle\int_{|z|=1} z\,tg\,\pi z\,dz$;

2) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$, мұндағы $C: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$;

3) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{z^3(z+1)}$;

4) $\displaystyle\int_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$;

5) $\displaystyle\int_{|z|=1/2} z^2 \sin\frac{1}{z}dz$;

6) $\displaystyle\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2-z}dz$;

7) $\displaystyle\int_{|z+1|=4} \frac{z\,dz}{e^z+3}$;

8) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{\sin^3 z \cos z}$;

9) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

10) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$;

11) $\displaystyle\int_C \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz$, мұндағы $C: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

12) $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz$, мұндағы $C: x^2+y^2-2x=0$;

13) $\displaystyle\int_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}dz$, мұндағы $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$;

14) $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$, мұндағы $C: x^2+y^2=16$;

15) $\displaystyle\int_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz$, мұндағы $C: \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

16) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, мұндағы $C: x^2+y^2=2x$;

17) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^3 \sin\frac{1}{z}dz$;

18) $\displaystyle\int_{|z|=1/3} (z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$;

19) $\displaystyle\int_{|z|=2/3} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$;

№4. Келесі функциялар үшін шексіз алыс нүктенің сипаттамасын анықтаңыз.

1) $f(z)=\dfrac{z^3-z^2+z+6}{z^2}$;

2) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4}$;

3) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$;

4) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$;

5) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$;

6) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$.

№5. Шексіз алыс нүктеге қатысты шегермені қолданып төмендегі интегралдарды есептеңіз.

1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^{12}}$;

2) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3}dz$;

3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1000z+2}{1+z^{1224}}dz$;

4) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{e^z}{z-1}dz$;

5) $\displaystyle\int_{|z|=1}z^2\sin\frac{1}{z}dz$;

6) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz$.

№6. Келесі дәйексіз интегралдарды есептеңіз.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2}$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad a>0, b>0$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$;

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$;

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$;

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4dx}{(a+bx^2)^4},\quad a>0, b>0$;

7) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

8) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^6+1}dx$;

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$;

10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$;

11) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$.

№7. Келесі интегралдарды есептеңіз.

1) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx,\quad m>0, a>0$;

2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin xdx}{1+x^2+x^4}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{(x^2+1)(x^2+9)}, \quad \lambda>0$;

4) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos x dx}{(x^2+1)^2}, \quad a>0$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x dx}{x^2-2x+10}$;

6) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

7) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx, \quad a>0$;

8) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin ax dx}{(1+x^2)^2}, \quad a>0$;

9) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{3x^2-a^2}{(x^2+b^2)^2}\cos mx dx$.

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2+4x+20}$;

11) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+9}$;

12) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^4}dx, \quad a>0$.

№8. Сұйықтың ағыны комплекстік потенциалмен анықталады. Жылдамдықтар потенциалын, ағын функциясын, деңгейлік сызығын, ағын сызығын, V жылдамдық векторының шамасы мен бағытын, жылдамдық векторының $0x$ және $0y$ координат өстеріне V_{0x} және V_{0y} проекцияларын табыңыз:

1) $f(z)=z^2+2z+2$;

2) $f(z)=\frac{1}{z^2}$;

3) $f(z)=\ln(z-1)$.

№9. Деңгей сызығының теңдеуі $x^2-y^2+2xy+x=const$ және $f(0)=0$ шарты берілген. Сұйық ағынының комплекстік потенциалын құрыңыз.

№10. Ағын сызығының теңдеуі $\cos x sh y=const$ және $f(0)=0$ шарты берілген. Сұйық ағынының комплекстік потенциалын құрыңыз.

№11. Сұйық ағынының комплекстік потенциалы $f(z)=5i\ln(z^2-a^2)$ берілген. $|z\pm a|=a$ шеңбері бойынша циркуляциясын табыңыз.

6 ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР ЭЛЕМЕНТТЕРІ

6.1 Лаплас түрлендіруі. Түпнұсқалар мен олардың кескіндері

Операциялық есептеулер инженерлік жүйелерде қолданбалы есептерді шешуде, атап айтсақ, автоматтандыру жүйесі мен телемеханикада маңызды рөл атқарады.

Операциялық есептеу – математикалық талдаудың дифференциалдық және интегралдық операторларды зерттеуді және осы операторларға қатысты теңдеулерді шешуді қарапайым алгебралық есептерді қарастыруға келтіретін әдістерінің бірі.

Операциялық есептеулердің әдістері есепті шешудің келесі шартты схемасын іске асыруды болжайды:

1. ізделінді функциялардан басқа фунцияларға - олардың бейнелеріне (кескіндеріне) көшу;
2. функцияларға қолданылатын амалдарды бейнелерге жүргізу;
3. бейнелерге қолданған амалдар нәтижесін ала отырып, функциялардың өздеріне (түпнұсқаларға) қайтып оралу.

Функциялардан олардың кескіндеріне көшу үшін *Лаплас түрлендіруі* деп аталатын түрлендіруді қолданамыз.

Операциялық есептеулердің негізгі алғашқы ұғымдары түпнұсқа-функциялары мен кескін–функциялары болып табылады.

$f(t)$ нақты t айнымалысынан тәуелді нақты мәнді функциясы (нақты функция) болсын (t уақыт немесе координата).

Анықтама 33. Егер $f(t)$ функциясы:

1. $t<0$ үшін $f(t)=0$ болады;
2. $[t;+\infty)$ аралығында $f(t)$ бөлік-үзіліссіз, яғни функция үзіліссіз немесе тек I текті үзіліс нүктелеріне ие бола алады, әрі t өсінің әрбір шектелген аралықтарында бұндай нүктелер саны шектеулі болады;
3. кез келген t үшін $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0t}$ шартын қанағаттандыратын $M>0$ және $s_0\ge 0$ сандары табылады, яғни t өскенде $f(t)$ функциясының өсу жылдамдығы қандайда бір көрсеткіштік функцияның өсу жылдамдығынан артпайды (s_0 саны $f(t)$ функциясының *өсу көрсеткіші* деп аталады)

деген шарттарды қанағаттандыратын болса, онда ол *түпнұсқа* деп аталады.

1-3 шарттары әртүрлі физикалық үрдістерді сипаттайтын көптеген функциялар үшін орындалады.

Бірінші шарт үрдістің белгілі бір уақыт сәтінде басталатынын білдіреді; әдетте $t=0$ сәтінде деп есептеу қолайлы. Мысалы үшін, үшінші шартты шектелген және (олар үшін $s_0=0$ деп алуға болады) t^n, $n>0$ дәрежелік функциялар қанағаттандырады. Бұл шартты қанағаттандырмайтын функция ретінде $f(t)=\alpha e^{t^2}$ функциясын келтіруге болады.

Ескерту: $f(t)$ функциясы нақты айнымалы комплекс мәнді функция да болуы, яғни $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ түрінде жазылуы мүмкін. Егер $f_1(t), f_2(t)$ нақты функциялары түпнұсқалар болса, онда $f(t)$ функциясы түпнұсқа деп саналады.

Анықтама 34. $f(t)$ түпнұсқасының *кескіні* деп

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{72}$$

интегралдық түрінде анықталған $p=s+i\sigma$ комплекс айнымалысынан тәуелді $F(p)$ функциясын айтамыз.

$f(t)$ түпнұсқасынан $F(p)$ кескініне өту амалы, яғни (72) теңдігінің оң жағындағы интеграл $f(t)$ функциясының *Лаплас түрлендіруі* деп аталады. $f(t)$ түпнұсқасы мен $F(p)$ кескінінің арасындағы сәйкестік $f(x)\div F(p)$ немесе $F(p)\div f(x)$ түрінде жазылады (түпнұсқаларды кіші, ал кескіндерді бас әріптермен белгілеу келісілген).

Теорема 13 (кескіннің болуы). Егер s_0 саны $f(t)$ түпнұсқасының өсу көрсеткіші болса, онда $\operatorname{Re} p=s>s_0$ жарты жазықтығында оның $F(p)$ кескіні бар болады және ол осы жарты жазықтықта аналитикалық функция болады.

Дәлелдеу: Теореманың бірінші бөлігін дәлелдейік. $p=s+i\sigma$ нүктесі $\operatorname{Re} p=s>s_0$ жарты жазықтығының еркі нүктесі болсын (22-сурет). $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t}$, $s-s_0>0$ және $\left|e^{-pt}\right|=\left|e^{-st}\cdot e^{-i\sigma t}\right|=e^{-st}\left|\cos\sigma t-i\sin\sigma t\right|=e^{-st}$ екенін ескерсек,

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right|\le\int_0^{\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt\le M\int_0^{\infty} e^{s_0 t}\left|e^{-pt}\right|dt=M\int_0^{\infty} e^{s_0 t}e^{-pt}dt=M\int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t}dt=\frac{M}{s-s_0}$$

болатынын, яғни

$$|F(p)|=\left|\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right|\le\frac{M}{s-s_0} \tag{73}$$

теңсіздігін аламыз.

Бұдан (72) интегралының жинақтылығы, яғни $\operatorname{Re} p=s>s_0$ жарты жазықтығында $F(p)$ кескінінің бар болатындығы шығады.

Теореманың екінші жартысын, яғни $F(p)$ кескінінің $\operatorname{Re} p=s>s_0$ жарты жазықтығында аналитикалық функция болатынын дәлелдеу үшін, оның осы жарты жазықтықтың кез келген нүктесінде дифференциалданатынын көрсету жеткілікті. Анықтама 34 бойынша $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$. Бұл теңдікті p айнымалысы бойынша дифференциалдасақ (теңдіктің оң жағының туындысы - интегралдың p параметрі бойынша туындысы болады)

$$F'(p)=-\int_0^{\infty} tf(t)e^{-pt}dt$$

теңдігін аламыз. $\operatorname{Re} p=s>s_0$ жарты жазықтығында орынды

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)te^{-pt}dt\right|\le\int_0^{\infty}|f(t)|te^{-pt}dt\le M\int_0^{\infty} e^{(s-s_0)t}tdt=\frac{M}{(s-s_0)^2}$$

теңсіздігінен $\int_0^\infty t\, f(t) e^{-pt} dt$ интегралының p параметрі бойынша осы жарты жазықтықта бірқалыпты жинақты болатыны, яғни $F'(p)$ туындысының бар болатыны шығады. Олай болса $F(p)$ кескіні $\operatorname{Re} p = s > s_0$ жарты жазықтығында аналитикалық функция болады.

Салдар (кескіннің болуы қажетті шарты). Егер $F(p)$ функциясы $f(t)$ түпнұсқасының кескіні болса, онда

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0 .$$

Бұл тұжырымның дұрыстығы, (73) теңсіздігінен $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$ жағдайында шығады.

Мысалы, $F(p) = 5,\ F(p) = p^2$ функциялары үшін аталған қажетті шарт орындалмайды, сондықтан, жоғарыдағы салдар бойынша бұл функциялар ешбір түпнұсқа үшін кескін бола алмайды.

$F(p)$ функциясының $\operatorname{Re} p = s > s_0$ аналитикалық болуынан оның барлық айрықша нүктелерінің $\operatorname{Re} p = s = s_0$ түзуінің бойында немесе оның сол жағында жататындығы шығады. Бұл шартты қанағаттандырмайтын $F(p)$ функциясы кескін бола алмайды.

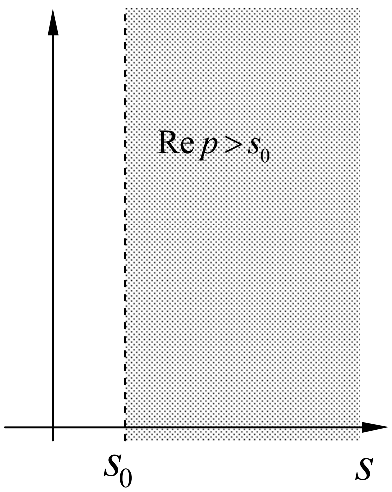
Мысалы, $F(p) = tg\, p$ функциясы кескін бола алмайды, себебі, оның айрықша нүктелері барлық s өсінде орналасқан.

Теорема 14 (түпнұсқаның жалғыз болуы). Егер $F(p)$ функциясы $f_1(t)$ және $f_2(t)$ түпнұсқаларының кескіні болса, онда бұл түпнұсқалар екеуі де үздіксіз болатын нүктелерде бір біріне тең болады (Дәлелдеусіз қабылдайық).

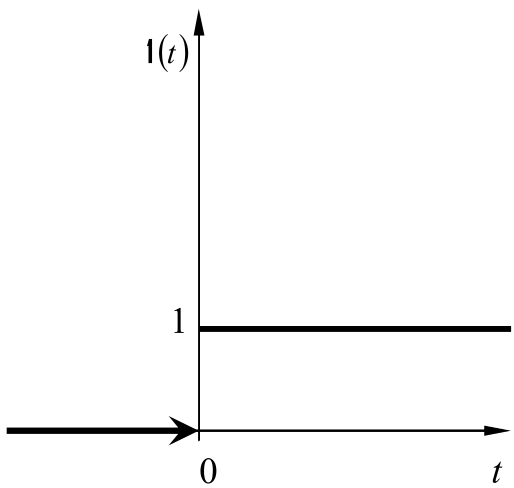
Мысал 90: Хевисайд

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{егер } t \ge 0, \\ 0, & \text{егер } t < 0 \end{cases}$$

бірлік функциясының кескінін табыңыз (23-сурет).



22-сурет



23-сурет

Шешімі: Хевисайд функциясы үшін $|\mathbf{1}(t)| \le 1 = 1 \cdot e^{0 \cdot t}$ теңсіздігі орынды болғандықтан $M = 1,\ s_0 = 0$ деп алуға болады.

s=Rep>0 болғанда (72) формуласы бойынша

$$F(p)=\int_0^{\infty}1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\right)\Bigg|_0^b=\frac{1}{p}$$

екенін, яғни $F(p)=\frac{1}{p}$ болатынын аламыз. Бұл теңдік, белгілеуіміз бойынша

$1(t)\div\frac{1}{p}$ немесе $1\div\frac{1}{p}$ түрінде жазалады.

Ескерту: Кейіннен түпнұсқа - функциясын,

$$f(t)=\begin{cases} f(t), & \text{егер } t\geq 0,\\ 0, & \text{егер } t<0\end{cases}$$

екенін ескере отырып, қысқаша $f(t)$ түрінде жазамыз.

Мысал 91: $f(t)=t$ функциясының кескінін табыңыз.

Шешімі:

$$F(p)=\int_0^{\infty}t\,e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}te^{-pt}dt=\begin{bmatrix} u=t \quad \Rightarrow du=dt\\ dv=e^{-pt}dt\Rightarrow v=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^b-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Bigg|_0^b=\frac{1}{p^2}.$$

Бұл теңдіктен

$$\lim_{b\to\infty}\left|\frac{1}{p}be^{-pb}\right|=\frac{1}{\sqrt{s^2+\sigma^2}}\lim_{b\to\infty}be^{-sb}=0$$

болғандықтан

$$F(p)=\frac{1}{p^2},\text{ яғни } t\div\frac{1}{p^2} \tag{74}$$

екенін аламыз.

Мысал 92: $f(t)=e^{at}$ функциясының кескінін табыңыз, мұндағы a кез келген сан.

Шешімі: Берілген функция - түпнұсқа. Егер Re$(p-a)$>0 болса, онда (72) формуласы бойынша

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{at}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}e^{-(p-a)t}dt=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{p-a}\cdot e^{-(p-a)t}\Bigg|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a}\right)=\frac{1}{p-a}.$$

Сонымен

$$e^{at}\div\frac{1}{p-a}\quad(\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a). \tag{75}$$

Ескерту: $F(p)=\frac{1}{p-a}$ функциясы, (72) интегралы жинақты болатын $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a$ жарты жазықтығында ғана емес, p комплекс жазықтығының $p=a$ нүктесінен басқа барлық нүктелерінде аналитикалық болады. Бұндай ерекшелік басқа да көптеген кескіндерде де байқалады. Біз үшін, осыдан осылай, кескіннің (72) түріндегі интегралдық өрнектелуі орынды болатын облыстан гөрі кескіннің өзі маңызды болады.

6.2 Лаплас түрлендірулерінің қасиеттері

Кескінді оның анықтамасын ғана қолданып табу үнемі оңай және қолайлы бола бермейді. Лаплас түрлендірулерінің қасиеттері көптеген функциялар үшін олардың кескіндерін, сондай-ақ олардың кескіндері бойынша түпнұсқаларын табу есептерін әлдеқайда жеңілдетеді.

Сызықтылық

Егер $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$ және c_1, c_2 тұрақты сандар болса, онда $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$ болады, яғни түпнұсқаның сызықтық комбинациясына кескіннің тура сондай сызықтық комбинациясы сәйкес келеді.

Интегралдың қасиетін қолдансақ

$$\int_0^\infty (c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)) e^{-pt} dt = c_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-pt} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt} dt = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p).$$

Мысал 93: $\sin \omega t, \cos \omega t$ (ω - кез келген сан), $c\ (const), ch\,\omega t, sh\,\omega t$ функцияларының кескіндерін табыңыз.

Шешімі: сызықтылық қасиетін және (75) формуласын қолданып

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

екенін, яғни

$$\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{76}$$

болатынын аламыз. Сол сияқты

$$\cos \omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{77}$$

формуласын аламыз.

$1 \div \frac{1}{p}$ болғандықтан (91-мысалға қараңыз) $c = c \cdot 1 \div c \cdot \frac{1}{p}$, яғни

$$c \div \frac{c}{p}$$

болады. $e^{at} \div \frac{1}{p - a}$ болғандықтан (92-мысалға қараңыз)

$$ch\,\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \frac{1}{2} e^{\omega t} + \frac{1}{2} e^{-\omega t} \div \frac{1}{2}\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p + \omega} = \frac{p}{p^2 - \omega^2},$$

яғни

$$ch\,\omega t \div \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \tag{78}$$

болады. Сәйкесінше

$$sh\,\omega\, t \div \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \qquad (79)$$

формуласын аламыз.

Ұқсастық

Егер $f(t)\div F(p)$ және $\lambda>0$ болса, онда $f(\lambda t)\div \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, яғни түпнұсқаның аргументін λ оң санына көбейту кескін мен оның аргументін осы санға бөлуге келтіреді.

(72) формуласы бойынша

$$f(\lambda t)\div\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=[\lambda t=\tau]=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Мысалы үшін, $\cos t\div\frac{p}{p^2+1}$. Онда $\cos\omega t\div\frac{1}{\omega}\frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$.

Жылжыту

Егер $f(t)\div F(p)$ және $a=const$ болса, онда $e^{at}\cdot f(t)\div F(p-a)$, яғни түпнұсқаның e^{at} функциясына көбейтілуі p айнымалысының жылжуына әкеледі.

(72) формуласы бойынша

$$e^{at}\cdot f(t)\div\int_0^\infty e^{at}\cdot f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-a)t}dt=F(p-a),\quad (\mathrm{Re}(p-a)>s_0).$$

Осы қасиетке сүйеніп түпнұсқалар мен кескіндердің сәйкестілігін көрсететін кестені кеңейтіп жазуға болады:

$$e^{at}\cdot\sin\omega t\div\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2};$$

$$e^{at}\cdot\cos\,\omega t\div\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2};$$

$$e^{at}\cdot \mathrm{sh}\,\omega t\div\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2};$$

$$e^{at}\cdot ch\,\omega t\div\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

Мысал 94: $F(p)=\frac{2p-5}{p^2-6p+11}$ кескіні берілген, оның түпнұсқасын табыңыз.

Шешімі: Түпнұсқаны берілген бөлшекті жылжыту қасиетін қолдана алатындай түрге келтіріп алып (78), (79) формулалары мен сызықтылық қасиетін пайдалана отырып табамыз:

$$F(p)=\frac{2p-5}{p^2-6p+11}=\frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2}=2\frac{p-3+1}{(p-3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\div$$

$$\div 2e^{3t}\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{3t}\sin\sqrt{2}t=f(t).$$

Кешігу

Егер $f(t)\div F(p),\quad \tau>0$ болса, онда $f(t-\tau)\div e^{-p\tau}F(p)$, яғни түпнұсқаның τ оң шамасына кешігуі түпнұсқаның кешігусіз кескінінің $e^{-p\tau}$ шамасына көбейтілуіне әкеледі.

$t-\tau=t_1$ деп алсақ, онда

$$f(t-\tau)\div\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_{-\tau}^\infty f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1=\int_0^\infty f(t_1)e^{-p\tau}\cdot e^{-pt_1}dt_1=e^{-p\tau}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}F(p).$$

«Кешігу» ұғымын түсіндіріп кетейік. $f(t-\tau)$ функциясының графигін $f(t)$ функциясының графигін τ бірлігіне оңға жылжыту арқылы алуға болады (24-сурет). Сондықтан, $f(t)$ және $f(t-\tau)$ функциялары бір үрдісті сипаттайды, бірақ $f(t-\tau)$ функциясы сипаттайтын үрдіс τ уақытына кешігіп басталады.

Кешігу қасиетін әртүрлі аралықтарда әртүрлі аналитикалық өрнекпен берілген, яғни иппульстік үрдісті сипаттайтын функциялардың кескіндерін табуда қолдану қолайлы.

$$\mathbf{1}(t-\tau)=\begin{cases}1, & \text{егер } t\geq\tau,\\ 0, & \text{егер } t<\tau\end{cases}$$

функциясы *жалпыланған бірлік (Хевисайд) функция* деп аталады (25-сурет). 90-мысалда

$$\mathbf{1}(t)\div\frac{1}{p}$$

болатыны көрсетілген, онда

$$\mathbf{1}(t-\tau)\div\frac{1}{p}e^{-p\tau}.$$

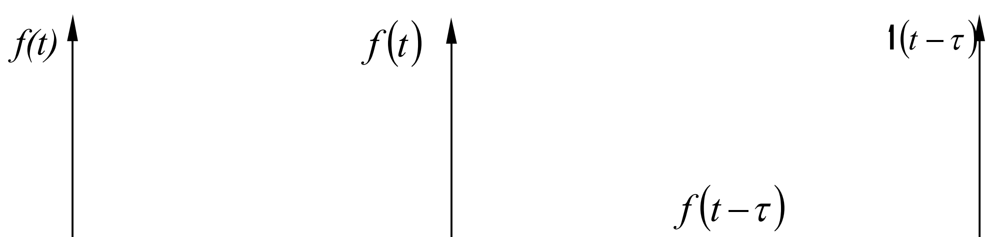
Кешігулі

$$g(t)=\begin{cases}f(t-\tau), & \text{егер } t\geq\tau,\\ 0, & \text{егер } t<\tau\end{cases}$$

функциясын

$$g(t)=f(t-\tau)\cdot\mathbf{1}(t-\tau)$$

түрінде жазуға болады.



O t O τ t τ t

24-сурет 25-сурет

Мысал 95: $f(t)=t-1$ функциясының кескінін табыңыз.

Шешімі: $f(t)$ функциясы түпнұсқа бола алу үшін ол 1) - 3) шарттарын қанағаттандыруы керек. Бұл мағынада берілген есепті екі ұшты түсінуге болады.

Егер $f(t)$ функциясын

$$f(t)=\begin{cases} t-1, & \text{егер} \quad \mathrm{t}\geq 0, \\ 0, & \text{егер} \quad \mathrm{t}<0, \end{cases}$$

яғни $f(t)=(t-1)\cdot\mathbf{1}(t)$ түріндегі (26 *а*-сурет) функция деп қабылдасақ, онда $t\div\dfrac{1}{p^2}$, $\mathbf{1}\div\dfrac{1}{p}$ сәйкестіктері ((74) формуласын қара) және сызықтылық қасиетінен

$$f(t)=(t-1)\cdot\mathbf{1}(t)\div\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=F(p)$$

болатыны шығады.

Ал, егер $f(t)$ функциясын

$$f(t)=\begin{cases} t-1, & \text{егер} \quad \mathrm{t}\geq 1, \\ 0, & \text{егер} \quad \mathrm{t}<1, \end{cases}$$

яғни $f(t)=(t-1)\cdot\mathbf{1}(t-1)$ түріндегі (26 *б*-сурет) функция деп қабылдасақ, онда кешігу қасиетінен

$$f(t)=(t-1)\cdot\mathbf{1}(t-1)\div\frac{1}{p^2}\cdot e^{-p}=F(p)$$

болатынын аламыз.

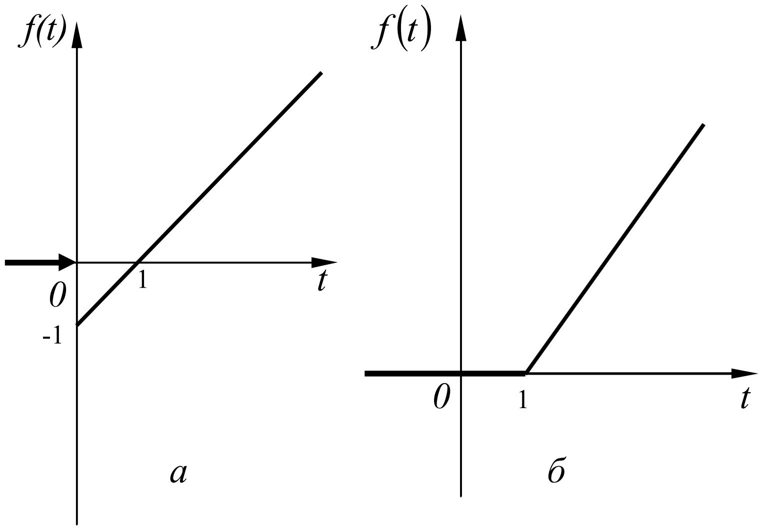
Мысал 96: Берілген

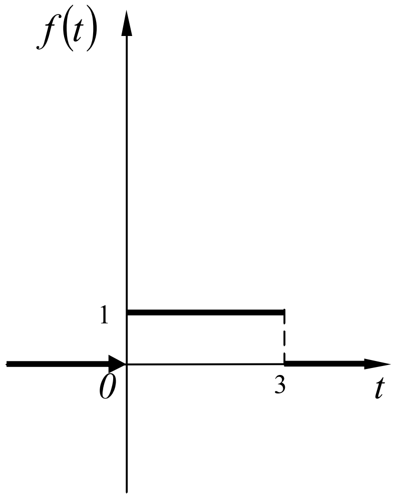
$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{егер} \quad t<0, \\ 1, & \text{егер } 0\leq t\leq 3, \\ 0 & \text{егер} \quad t>3 \end{cases}$$

функциясының кескінін табыңыз.

Шешімі: $\mathbf{1}(t)$ бірлік және $\mathbf{1}(t-3)$ жалпы бірлік функциялары арқылы $f(t)=\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-3)$ айырмасы түрінде қарастыруға болады (27-сурет). Олай болса

$$f(t)=\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-3)\div\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot e^{-3p}=F(p).$$





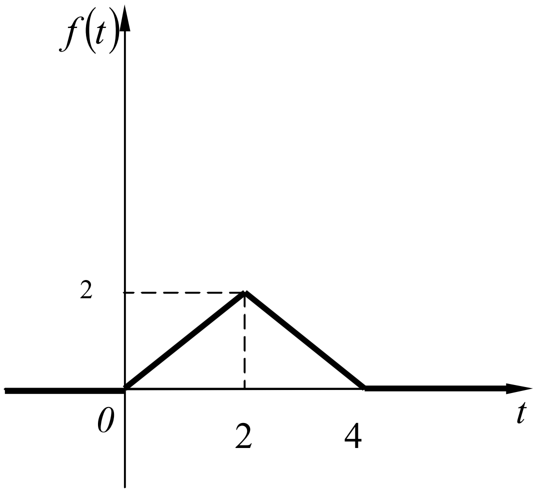
26-сурет 27-сурет

Мысалы 97: Берілген

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{егер } \ t<0, t\geq 4,\\ t, & \text{егер } \ 0\leq t\leq 2,\\ 4-t & \text{егер } \ 2<t<4\end{cases}$$

функциясының кескінін табыңыз.

Шешімі: Түпнұсқа-функциясының графигін көрсетейік (28-сурет).



28-сурет

Хевисайд $\mathbf{1}(t)$ және $\mathbf{1}(t-\tau)$ функцияларын қолдана отырып оны бір ғана аналитикалық өрнек түрінде жазайық:

$$f(t)=t\cdot\mathbf{1}(t)-t\cdot\mathbf{1}(t-2)+(4-t)\cdot\mathbf{1}(t-2)-(4-t)\cdot\mathbf{1}(t-4).$$

Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерін жинақтайық:

$$f(t)=t\cdot 1(t)-2(t-2)\cdot 1(t-2)+(t-4)\cdot 1(t-4).$$

Сызықтылық қасиетін пайдаланып $f(t)$ функциясының кескінін табамыз:

$$f(t)\div\frac{1}{p^2}-2\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}e^{-4p}=F(p).$$

Ескерту:

1. Периоды *T* болатын периодты түпнұсқаның кескіні деп

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

функциясын айтамыз.

2. Лаплас түрлендіруінің

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\left(F(p)-\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt\right)$$

түріндегі қасиеті *озықтық қасиеті* деп аталады. Бұл қасиет сирек қолданылады.

6.3 Түпнұсқалар мен кескіндердің дифференциалдануы

6.3.1 Түпнұсқалардың дифференциалдануы

Егер $f(t)\div F(p)$ және $f'(t), f''(t),\dots,f^{(n)}(t)$ функциялары түпнұсқалар болса, онда

$$f'(t)\div p\cdot F(p)-f(0), \tag{80}$$

$$f''(t)\div p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0), \tag{81}$$

$$f'''(t)\div p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(0)-f''(0), \tag{82}$$

....,

$$f^{(n)}(t)\div p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-\dots-f^{(n-1)}(0). \tag{83}$$

Кескіннің анықтамасы бойынша

$$f'(t)\div\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=\begin{bmatrix} u=e^{-pt}, & du=-pe^{-pt}dt \\ dv=f'(t)dt, & v=f(t)\end{bmatrix}=f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=-f(0)+pF(p).$$

Демек, $f'(t)\div pF(p)-f(0)$. Алынған нәтижені қолданып $f''(t)$ екінші ретті туындысының кескінін табамыз:

$$f''(t)=\left(f'(t)\right)'\div p\left(p\cdot F(p)-f(0)\right)-f'(0)=p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0).$$

Осылайша $f'''(t)$ үшінші ретті туындысының кескінін табамыз:

$$f'''(t)=p\left(p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0)\right)-f''(0)=p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(0)-f''(0).$$

(80) формуласын $(n-1)$ рет қолдансақ (83) формуласын аламыз.

Ескерту: (80)-(83) формулалары нөлдік бастапқы шартарында қарапайым түрде беріледі: егер $f(0)=0$ болса, онда $f'(t)\div p\cdot F(p)$; егер $f(0)=f'(0)=0$ болса, онда $f''(t)\div p^2\cdot F(p)$, соңында, егер $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$ болса, онда

$f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F(p)$, яғни түпнұсқаның дифференциалдануына оның кескінін p айнымалысына көбейту сәйкес қойылады.

Қарастырылған түпнұсқаның дифференциалдану қасиеті сызықтылық қасиетімен бірге сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуде кеңінен қолданылады.

Мысалы 98: Егер $x(0)=3, x'(0)=0, x''(0)=-2$ болса, онда

$$x'''(t)-2x''(t)-3x'(t)+2x(t)+2$$

өрнегінің кескіні қандай болады?

Шешімі: $x(t)\div X(p)=X$ болсын. Онда (80)-(82) формулаларына сәйкес

$$x'(t)\div p\cdot X-3,$$
$$x''(t)\div p^2\cdot X-p\cdot 3-0,$$
$$x'''(t)\div p^3\cdot X-p^2\cdot 3-p\cdot 0+2,$$
$$2\div 2\cdot 1\div \frac{2}{p}.$$

Бұдан, сызықтылық қасиеті негізінде,

$$x'''(t)-2x''(t)-3x'(t)+2x(t)+2\div p^3\cdot X-3p^2+2-2\left(p^2\cdot X-3p\right)-3(p\cdot X-3)+2X+\frac{2}{p}$$

сәйкестігін аламыз.

6.3.2 Кескіндердің дифференциалдануы

Егер $f(t)\div F(p)$ болса, онда

$$F'(p)\div -t\cdot f(t),$$
$$F''(p)\div (-1)^2 t^2\cdot f(t),$$
..................................,
$$F^{(n)}(p)\div (-1)^n\cdot t^n\cdot f(t),$$
..................................,

яғни кескіннің дифференциалдануына оның түпнұсқасының $(-t)$ айнымалысына көбейтілуі сәйкес келеді.

Кескіннің бар болуы туралы теорема 13 бойынша $F(p)$ функциясы $\operatorname{Re} p=s>s_0$ жартылай жазықтығында аналитикалық функция болады. Олай болса, оның кез келген ретті туындысының бар болады. (72) интегралын p параметрі бойынша дифференциалдай отырып (бұл амалдың заңдылығын негіздеуді оқырманның өзіне тапсырамыз).

$$F'(p)=\left(\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\right)'_p=\int_0^\infty \left(f(t)\cdot e^{-pt}\right)'_p dt=\int_0^\infty f(t)\cdot(-t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty (-t\cdot f(t))\cdot e^{-pt}dt\div -t\cdot f(t),$$

яғни $F'(p)\div -t\cdot f(t)$ сәйкестігін аламыз. Демек

$$F''(p)=\left(F'(p)\right)'\div -t(-t\cdot f(t))=t^2\cdot f(t),$$
$$F'''(p)\div -t\left(t^2\cdot f(t)\right)=-t^3\cdot f(t)$$

және

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

Мысал 99: $t^n \ (n \in N), e^{at} \cdot t^n, t \cdot \sin \omega t, t \cdot \cos \omega t, t \cdot sh\omega t, t \cdot ch\omega t, e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t, e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$ функцияларының кескіндерін табыңыз.

Шешімі: $1 \div \frac{1}{p}$ болғандықтан, кескіннің дифференциалдану қасиеті бойынша

$$-t \cdot 1 \div -\frac{1}{p^2},$$

яғни

$$t \div \frac{1}{p^2}.$$

Бұдан $-t^2 \div \left(\frac{1}{p^2}\right)'_p = -\frac{2}{p^3}$, яғни $t^2 \div \frac{2!}{p^3}$. Дифференциалдау үрдісін жалғастыра отырып

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

сәйкестігін аламыз.

Жылжыту қасиетін есепке алсақ

$$e^{at} \cdot t^n \div \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

(76) формуласына сүйенсек $\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Бұдан

$$\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)'_p \div -t \sin \omega t,$$

яғни $-\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \div -t \sin \omega t$ немесе

$$t \sin \omega t \div \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \tag{84}$$

Сейкесінше, (77), (78), (79) формулаларына кескінді дифференциалдау ережесін қолдансақ

$$t \cos \omega t \div \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \tag{85}$$

$$t sh\ \omega t \div \frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2},$$

$$t ch\ \omega t \div \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$$

сәйкестіктерін аламыз.

Жылжыту қасиетін есепке ала отырып, (84), (85) формулаларының көмегімен

$$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t\div\frac{2\omega(p-a)}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2},$$

$$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t\div\frac{(p-a)^2-\omega^2}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$$

сәйкестіктеріне келеміз.

6.4 Түпнұсқалар мен кескіндердің интегралдануы
6.4.1 Түпнұсқалардың интегралдануы

Егер $f(t)\div F(p)$ болса, онда $\int\limits_0^t f(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau\div\frac{F(p)}{p}$, яғни түпнұсқаны *0*-ден *t*-ға дейін интегралдау оның кескінін *p*-ға бөлуге сәйкес келеді.

$\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau$ функциясы түпнұсқа болып табылады (тексеріп көрсетуге болады). $\varphi(t)\div\Phi(p)$ болсын. Онда түпнұсқаның дифференциалдануының қасиеті бойынша

$$\varphi'(t)\div p\cdot\Phi(p)-\varphi(0)=\left|\varphi(0)=0\right|=p\cdot\Phi(p),$$

Бұл сәйкестіктен

$$\varphi'(t)=\left(\int\limits_0^t f(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau\right)_t^{'}=f(t)$$

теңдігін ескерсек, $f(t)\div p\cdot\Phi(p)$ сәйкестігі шығады. Берілгені бойынша $f(t)\div F(p)$, олай болса

$$F(p)=p\cdot\Phi(P).$$

Бұдан $\Phi(P)=\frac{F(p)}{p}$, яғни $\int\limits_0^t f(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau\div\frac{F(p)}{p}$ сәйкестігін аламыз.

6.4.2 Кескіндердің интегралдануы

Егер $f(t)\div F(p)$ және $\int\limits_p^\infty F(\rho)\cdot \mathrm{d}\rho$ интегралы жинақты болса, онда

$$\int\limits_p^\infty F(\rho)\cdot \mathrm{d}\rho\div\frac{f(t)}{t},$$

яғни кескінді *p*-дан ∞-ке дейін интегралдау оның түпнұсқасын *t*-ға бөлуге сәйкес келеді.

(72) формуласын қолданып және интегралдау ретін өзгертіп (бұл амалдың заңдылығын негіздемей)

$$\int_{p}^{\infty} F(\rho)\cdot \mathrm{d}\rho \div \int_{p}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\mathrm{dt}\right)d\rho = \int_{0}^{\infty}\left(\int_{p}^{\infty} e^{-pt}\mathrm{dt}\right)f(t)dt = \int_{0}^{\infty}\left(-\frac{1}{t}e^{-pt}\Big|_{p}^{\infty}\right)f(t)dt = \int_{0}^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \div \frac{f(t)}{t}$$

сәйкестігін аламыз.

Мысал 100: $\dfrac{\sin t}{t}$ функциясы мен $\int_{0}^{t}\dfrac{\sin\tau}{t}d\tau$ интегралдық синусының кескіндерін табыңыз.

Шешімі: $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$ болғандықтан, $\dfrac{\sin t}{t} \div \int_{p}^{\infty}\dfrac{1}{p^2+1}d\rho = \dfrac{\pi}{2} - arctg\ p$, яғни $\dfrac{\sin t}{t} \div \dfrac{\pi}{2} - arctg\, p = arcctgp$. Түпнұсқаның интегралдау қасиетін қолдансақ

$$\int_{0}^{t}\frac{\sin\tau}{t}d\tau \div \frac{\pi}{2p} - \frac{arctg\, p}{p}$$

сәйкестігін аламыз.

6.5 Түпнұсқалар мен кескіндердің көбейтіндісі
6.5.1 Кескіндердің көбейтіндісі

Егер $f_1(t) \div F_1(p)$ және $f_2(t) \div F_2(p)$ болса, онда

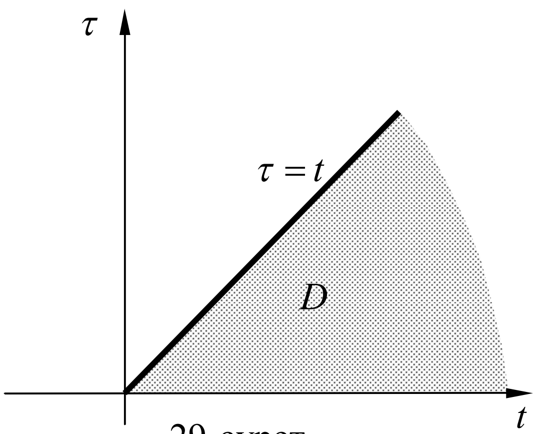
$$F_1(p)\cdot F_2(p) \div \int_{0}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau \qquad (86)$$

болады.

$\int_{0}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$ функциясы түпнұсқа болатынын көрсетуге болады. (72) Лаплас түрлендіруін қолдана отырып

$$\int_{0}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau \div \int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-pt}dt\int_{0}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

жазылуын аламыз. D интегралдау облысы $0 \le t < \infty$, $0 \le \tau \le t$ шарттарымен анықталады (29-сурет).



29-сурет

Интегралдау ретін өзгертіп және $t-\tau=t_1$ ауыстыруын жасасақ

$$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau \div \int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}\cdot f_2(t-\tau)dt = \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^\infty f_2(t_1)e^{-pt_1}dt_1 = F_1(p)\cdot F_2(p)$$

сәйкестігін аламыз.

(86) формуласының оң жағындағы интеграл $f_1(t), f_2(t)$ функцияларының *орамы* деп аталып $f_1(t)*f_2(t)$ нышанымен белгіленеді, яғни

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\ .$$

Бұнда $t-\tau=u$ деп алып ораманың көбейткіштердің орнын ауыстыру заңына бағынатынын, яғни $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ теңдігінің орынды болатынына көз жеткізуге болады.

Сонымен, кескіндердің көбейтіндісіне сәйкес түпнұсқа көбейткіштердің түпнұсқаларының орамасына тең, яғни

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\div f_1(t)*f_2(t).$$

Мысал 101: $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$ және $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$ функцияларының түпнұсқасын табыңыз.

Шешімі: $F(p)=\dfrac{1}{p^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1}{p^2+\omega^2}$ және $\dfrac{1}{p^2+\omega^2}\div\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$ болғандықтан

$$F(p)\div\int_0^t\frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega\tau\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2\omega^2}\cdot\int_0^t(\cos\omega(2\tau-t)-\cos\omega t)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\omega^2}\cdot\left(\frac{1}{2\omega}\sin\omega(2\tau-t)\Big|_0^t-\cos\omega t\cdot\tau\Big|_0^t\right)=\frac{1}{2\omega^2}\cdot\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-t\cos\omega t\right)=$$

$$=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cdot\cos\omega t),$$

яғни

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\div\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cdot\cos\omega t).$$

Осылайша

$$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\div\frac{1}{2\omega}\cdot t\cdot\sin\omega t$$

болатынын көреміз.

*Салдар***.** Егер $f_1*f_2\div F_1(p)\cdot F_2(p)$ және $f_1'(t)$ түпнұсқа болса, онда

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\div\int_0^t f_1'(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau+f_1(0)\cdot f_2(0). \qquad (87)$$

Дәлелдеуі: $p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)$ көбейтіндісін

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)=p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)-f_1(0)\cdot F_2(p)+f_1(0)\cdot F_2(p)$$

немесе

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)=\left(p\cdot F_1(p)-f_1(0)\right)\cdot F_2(p)+f_1(0)\cdot F_2(p).$$

түрінде жазамыз.

Оң жағындағы бірінші қосылғыш $f_1'(t)$ $\left(f_1'(t)\div p\cdot F_1(p)-f_1(0)\right)$ және $f_2(t)$ түпнұсқаларына сәйкес кескіндердің көбейтіндісі. Сондықтан кескіннің көбейтіндісінің қасиеті мен сызықтылықтың негізінде

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\div f_1'(\tau)*f_2(t)+f_1(0)\cdot f_2(t)$$

немесе

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\div\int_0^t f_1'(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\cdot d\tau+f_1(0)\cdot f_2(t)$$

сәйкестігін аламыз.

(87) формуласы *Дюамель формуласы* деп аталады.

Ораманың ауыстырымдылығының қасиеті негізінде Дюамель формуласын келесі түрде бере аламыз

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\div\int_0^t f_2(\tau)\cdot f_1'(t-\tau)\cdot d\tau+f_2(t)\cdot f_1(0)$$

Дюамель формуласын белгілі кескіндер бойынша түпнұсқаларды анықтауға қолдануға болады.

Мысал 102: $F(p)=\dfrac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$ кескінінің түпнұсқасын табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\text{ және }\frac{1}{p^2+1}\div\sin t,\quad\frac{p}{p^2+1}\div\cos t$$

болғандықтан (87) Дюамель формуласы бойынша

$$2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\div 2\int_0^t(\sin\tau)'\cdot\cos(t-\tau)d\tau+\sin 0\cdot\cos t=$$

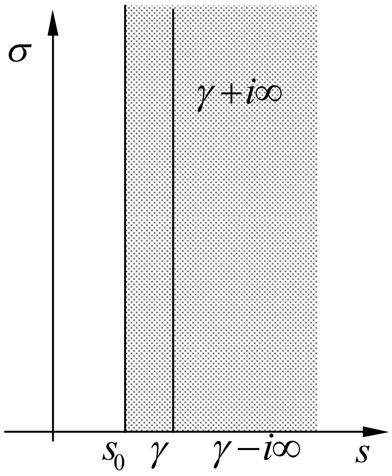
$$=2\int_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau+0=t\cdot\cos t+\sin t.$$

6.5.2 Түпнұсқалардың көбейтіндісі

Егер $f_1(t)\div F_1(p)$ және $f_2(t)\div F_2(p)$ болса, онда

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\div\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F_1(z)\cdot F_2(p-z)dz,$$

мұндағы интегралдау жолы - $\mathrm{Re}p=\gamma>s_0$ (30-сурет) вертикаль түзуі (дәлелдеусіз қабылдаймыз).



30-сурет

6.6 Лапластың кері түрлендіруі. Жіктелу теоремасы

Берілген $F(p)$ кескіні бойынша оған сәйкес $f(t)$ түпнұсқасын табуға мүмкіндік беретін *жіктелу теоремалары* деп аталатын екі теореманы қарастырамыз.

Теорема 15. Егер $F(p)$ функциясы $p=\infty$ нүктесінің аймағында

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^{21}}+\frac{c_2}{p^3}+...$$

түріндегі Лоран қатары ретінде жазылса, онда

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}=c_0+\frac{c_1t}{1!}+\frac{c_2t^2}{2!}+...\,(t>0)$$

функциясы $F(p)$ кескінінің түпнұсқасы болып табылады, яғни

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}\div\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}=f(t).$$

Бұл теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Мысал 103: $F(p)=\frac{1}{p}\cdot\sin\frac{1}{p}$ және $F(p)=\frac{p}{p^2+1}$ кескіндері берілген. Сәйкес түпнұсқаларды табыңыз.

Шешімі: $F(p)=\frac{1}{p}\cdot\sin\frac{1}{p}$ Лоран қатарына

$$F(p)=\frac{1}{p}\cdot\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{3!}\frac{1}{p^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{p^5}-...\right)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{p^4}+\frac{1}{5!}\frac{1}{p^6}-...$$

түрінде жіктеледі. Бұдан, Теорема 15 негізінде, түпнұсқа

$$f(t)=t-\frac{1}{3!}\frac{t^3}{3!}+\frac{1}{5!}\frac{t^35}{5!}...,\quad t>0$$

функциясы болатынын аламыз.

$F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ функциясының $p=\infty$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуін жазайық:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-...\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-...,$$

мұндағы $\left|\frac{1}{p^2}\right|<1$, яғни $|p|>1$. Бұдан, теорема 15 бойынша түпнұсқа

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}...=cost \quad (t>0)$$

функциясы болатынын аламыз.

Теорема 16. Егер $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ - бөлшегі $B(p)$ бөлімі тек $p_1, p_2, ..., p_n$ жай түбірлерге (нөлдері) ие болатын дұрыс рационал бөлшек болса, онда

$$f(t)=\sum_{n=1}^{n}\frac{A(p_k)_n}{B'(p_k)}e^{p_k t} \tag{88}$$

функциясы $F(p)$ кескінінің түпнұсқасы болып табылады.

Дәлелдеуі:

$\dfrac{A(p)}{B(p)}$ дұрыс рационал бөлшегін қарапайым бөлшектерге жіктейік

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+...+\frac{c_n}{p-p_n}, \tag{89}$$

мұндағы c_k $(k=1, 2,...,n)$ - анықталмаған коэффиценттер. Бұл жіктелудегі c_1 коэффициентін анықтау үшін осы теңдіктің екі жағын мүшелеп $p-p_1$ шамасына көбейту керек:

$$\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_1)=c_1+(p-p_1)\left(\frac{c_2}{p-p_2}+\frac{c_3}{p-p_3}+...+\frac{c_n}{p-p_n}\right).$$

Бұл теңдікте $B(p_1)=0$ екенін ескере отырып $p\to p_1$ жағдайында шекке көшсек

$$c_1=\lim_{p\to p_1}\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_1)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{p\to p_1}\frac{A(p)}{\dfrac{B(p)-B(p_1)}{p-p_1}}=\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}$$

теңдігін аламыз.

Демек, $c_1=\dfrac{A(p_1)}{B'(p_1)}$. Осы жолмен (89) теңдігінің екі жағын $p-p_i$ айырмасына көбейтіп $c_i=\dfrac{A(p_i)}{B'(p_i)}, i=2,...,n$ теңдігін аламыз.

Табылған $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ мәндерін (89) теңдігіне қойып $F(p)$ кескінінің

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}\frac{1}{p-p_1}+\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}\frac{1}{p-p_2}+\ldots+\frac{A(p_n)}{B'(p_n)}\frac{1}{p-p_n}$$

жазылуын аламыз.
(75) формуласы бойынша

$$\frac{1}{p-p_1}\div e^{p_1 t}, \quad \frac{1}{p-p_2}\div e^{p_2 t}, \ldots, \frac{1}{p-p_n}\div e^{p_n t},$$

онда сызықтылық қасиеті бойынша

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\frac{1}{p-p_k}\div\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}=f(t)$$

сәйкестігі шығады.
Ескерту: c_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ коэффициенттері $F(p)$ комплекс функциясының қарапайым полюстердегі шегермелері ретінде анықталатыны, яғни

$$c_k=\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}=\operatorname{Res}\left(\frac{A(p)}{B(p)}; p_k\right)$$

түрінде оңай есептелетінін байқауға болады.

Егер $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ дұрыс бөлшек, бірақ $B(p)$ бөлімінің $p_1, p_2, \ldots, p_n$ түбірлері (нөлдері) сәйкесінше $m_1, m_2, \ldots, m_n$ еселі болса, онда $F(p)$ кескінінің түпнұсқасы

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left(\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}(p-p_k)^{m_k}\right) \tag{90}$$

түрінде анықталады.
16-теореманы басқаша тұжырымдауға болады.

Теорема 17. Егер $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ кескіні p айнымалысының бөлшек-рационал функциясы және $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - осы функцияның жай немесе жоғарғы ретті полюстері болса, онда $F(p)$ кескініне сәйкес $f(t)$ түпнұсқасы

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}\div\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(F(p_k)\cdot e^{p_k t}\right)=f(t) \tag{91}$$

формуласымен анықталады.

6.7 Риман-Меллин формуласы

Кескіні бойынша түпнұсқаны анықтау әдісін Лапластың (Риман-Меллиннің айналдыру формуласы)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}\,dt \tag{92}$$

түріндегі кері түрлендіруі береді, мұндағы интеграл кез келген $\mathrm{Re}\, p = \gamma > S_0$ түзуі бойымен алынады.

Белгілі шарттар орынды болганда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p)\cdot e^{pt}dt = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(F(p)\cdot e^{pt}; p_k\right)$$

формуласымен есептеледі.

Ескерту: Әдетте іс жүзінде түпнұсқа-функциясын анықтау келесі жоспар бойынша жүргізіледі: ең алдымен берілген $F(p)$ кескінінің сәйкес түпнұсқасын түпнұсқалар мен кескіндер кестесі бойынша табуға әрекет жасау; $F(p)$ функциясысын қарапайым рационал бөлшектердің қосындысы түрінде өрнектеп алып, сонан соң, сызықтылық қасиетін қолдана отырып түпнұсқасын табу; жіктелу теоремасын, көбейту қасиетін, айналдыру формуласын және тағы басқаларын қолдану.

Мысал 104: Түпнұсқаны оның $F(p) = \dfrac{p-3}{p^2+4}$ кескіні бойынша табыңыз.

Шешімі: Қарапайым жолы:

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2} \div \cos 2t - \frac{3}{2}\cdot \sin 2t = f(t)$$

(сызықтылық қасиеті мен (76) және (77) формулаларын қолдандық).

Егер де 16 жіктелу теоремасын қолдансақ, онда $A(p) = p-3,\quad B(p) = p^2+4,\quad B'(p) = 2p$ және бөлімінің түбірлері $p_1 = 2i,\quad p_2 = -2i$ болады да (88) формуласы бойынша

$$f(t) = \frac{2i-3}{2\cdot 2i}e^{2it} + \frac{-2i-3}{2\cdot(-2i)}e^{-2it} = \frac{1}{4i}\left(2i\left(e^{2it}+e^{-2it}\right) - 3\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2i(\cos 2t + i\sin 2t + \cos 2t - \sin 2t) - 3(\cos 2t + i\sin 2t - \cos 2t + \sin 2t)\right) =$$

$$= \frac{1}{4i}\left(4i\cos 2t - 6i\sin 2t\right) = \cos 2t - \frac{3\sin 2t}{2}$$

теңдігін аламыз.

Мысал 105: Түпнұсқаны оның $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p-1)}$ кескіні бойынша табыңыз.

Шешімі: Мұнда $A(p) = p-3,\quad B(p) = p^3(p-3),\quad B'(p) = 4p^3 - 3p^2,\quad p_1 = 1$-бөлімінің қарапайым түбірі, ал $p_2 = 0$-үш еселі ($m = 3$) түбірі. (88) және (90) формуласы бойынша:

$$f(t) = \frac{1}{4-3}e^{1\cdot t} + \frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{p^3(p-1)}e^{pt}\cdot(p-0)^3\right)''_{pp} = e^t + \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)''_{pp} =$$

$$= e^t + \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\frac{t^2(p-1)^2 - 2t(p-1) + 2}{(p-1)^3}e^{pt} = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1,$$

яғни $f(t)=e^t-\frac{t^2}{2}-t-1$ екенін аламыз.

$f(t)$ түпнұсқасын табудың екінші әдісін келтірейік. $\frac{1}{p^3(p-1)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейік:

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)}=-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p-1}.$$

Бұдан, $f(t)=-1-t-\frac{t^2}{2}+e^t$ екенін аламыз.

$f(t)$ түпнұсқасын табудың үшінші әдісін қарастырайық. $F(p)$ кескінінің $\frac{1}{p^3(p-1)}=\frac{1}{p^3}\cdot\frac{1}{p-1}$ көбейтіндісі түрінде жазып, бұдан, $\frac{1}{p^3}\div\frac{t^2}{2}$ және $\frac{1}{p-1}=e^t$ болғандықтан, кескіндер көбейтіндісінің қасиеті бойынша (формула (86))

$$F(p)\div\int_0^t\frac{1}{2}\tau^2e^{t-\tau}d\tau=\left[\begin{array}{c|c}u=\tau^2 & du=2\tau d\tau\\ dv=e^{t-\tau}d\tau & v=-e^{t-\tau}\end{array}\right]=-\frac{1}{2}e^{t-\tau}\tau^2\Big|_0^t+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\int_0^t\tau e^{t-\tau}d\tau=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c}u=\tau & du=d\tau\\ dv=e^{t-\tau}d\tau & v=-e^{t-\tau}\end{array}\right]=-\frac{1}{2}t^2+0+\left(-\tau\cdot e^{t-\tau}\right)\Big|_0^t-e^{t-\tau}\Big|_0^t=-\frac{1}{2}t^2-t+0-1+e^t=$$

$$=e^t-\frac{1}{2}t^2-t-1=f(t)$$

сәйкестігін аламыз.

6.8 Сызықтық дифференциалдық теңдеулер мен олардың жүйесін шешудің операциялық әдісі

Тұрақты коэффициентті

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f(t) \tag{93}$$

сызықтық дифференциалдық теңдеуінің

$$y(0)=c_0,\quad y'(0)=c_1,\quad y^{(n-1)}(0)=c_{n-1},$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек болсын, мұндағы $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ -берілген сандар.

Ізделінді $y(t)$ функциясы, оның қарастырылатын туындылары және $f(t)$ функциясы түпнұсқалар болсын деп есептейік.

$y(t)\div Y(p)=Y$ және $f(t)\div F(p)=F$ болсын. Түпнұсқаны дифференциалдау мен сызықтылық қасиеттерін қолданып (93) теңдеуінде түпнұсқалардан кескіндерге өтеміз:

$$\left(p^nY-p^{n-1}c_0-p^{n-2}c_1-...-c_{n-1}\right)+a_1\left(p^{n-1}Y-p^{n-2}c_0-...-c_{n-2}\right)+...+a_{n-1}(pY-c_0)+a_nY=F.$$

Алынған теңдеуді *операторлық теңдеу* (немесе кескіндердегі теңдеу) деп атаймыз. Оны Y -ке қатысты шешсек:

$$Y\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n\right) = F + c_0\left(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + c_1\left(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) + \ldots + c_{n-1},$$

яғни $Y(p)\cdot Q_n(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$ теңдігін аламыз, мұндағы $Q_n(p)$ және $R_{n-1}(p)$ - p айнымалысынан тәуелді сәйкес n және $n-1$ дәрежелі алгебралық көпмүшеліктер.

Соңғы теңдеуден $Y(p)$ кескінін табамыз:

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \tag{94}$$

Алынған (94) теңдігі (93) дифференциалдық теңдеуінің *операторлық шешімі* деп аталады. Егер барлық бастапқы шарттар нөлдік, яғни $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$ болса, онда бұл шешім

$$Y(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}$$

қарапайым түрінде жазылады.

Кескіннің жалғыз болуы туралы теореманың көмегімен, табылған (94) кескініне сәйкес $y(t)$ түпнұсқасын анықтай отырып (93) дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табамыз.

Ескерту: Көптеген жағдайларда алынған $y(t)$ шешімі теңдеуді t -ның кез келген мәнінде қанағаттандыратын болады (тек $t \geq 0$ үшін ғана емес).

Мысал 106: $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0) = 2,\ y'(0) = 6$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін операциялық әдіспен табыңыз.

Шешімі: $y(t) \div Y(p) = Y$ болсын. Онда (80), (81) және (75) формулалары бойынша

$$y'(t) \div pY - y(0) = pY - 2,$$

$$y''(t) \div p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6,$$

$$e^{3t} \div \frac{1}{p-3}.$$

Дифференциалдық теңдеуде түпнұсқалардан кескіндерге көшсек

$$p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12\frac{1}{p-3}$$

операторлық теңдеуін аламыз. Теңдеуден $Y(p)$ кескінін табамыз:

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Енді $Y(p)$ кескінінен $y(t)$ түпнұсқасына көшу керек. Түпнұсқаға $\dfrac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектерге жіктеу арқылы көшуге болар еді $\left(Y(p)=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-2}+\dfrac{C}{p-3}\right)$, бірақ бұл арада бөлшектің бөлімінің түбірлері $(p_1=1, p_2=2, p_3=3)$ жай болғандықтан, жіктелудің екінші теоремасын ((88) формуласын) қолдану қолайлы болады:

$$A(p)=2p^2-6p+12, \qquad B(p)=(p-1)(p-2)(p-3),$$

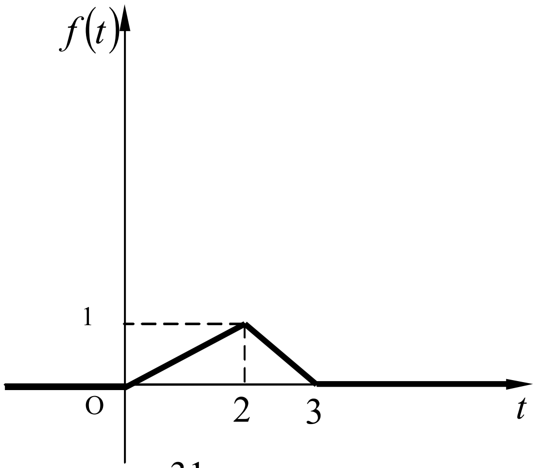
$$B'(p)=(p-2)(p-3)+(p-1)(p-3)+(p-1)(p-2).$$

$$y(t)=\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}+\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}+\frac{A(p_3)}{B'(p_3)}=\frac{8}{(-1)\cdot(-2)}e^{1\cdot t}+\frac{8}{1\cdot(-1)}e^{2\cdot t}+\frac{12}{2\cdot 1}e^{3\cdot t}=4e^t-8e^{2t}+6e^{3t}.$$

Мысал 107: $y''+4y=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, & \text{егер} 0\le \mathrm{t}<2,\\ 3-t, & \text{егер} 2\le \mathrm{t}<3,\\ 0 & \text{егер} \mathrm{t}<0, \mathrm{t}\ge 3\end{cases}$

теңдеуінің $y(0)=0, y'(0)=0$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табыңыз.

Шешімі: Берілген функцияның сызбасы 31-суретте көрсетілген.



31-сурет

Бірлік функцияның көмегімен берілген дифференциалдық теңдеудің оң жағын бір ғана аналитикалық өрнек түрінде жазуға болады:

$$f(t)=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{1}{2}t\cdot 1(t-2)+(3-t)\cdot 1(t-2)-(3-t)\cdot 1(t-3)=$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{1}{2}(t-2+2)\cdot 1(t-2)-(t-2-1)\cdot 1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3)=$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{1}{2}(t-2)\cdot 1(t-2)-1(t-2)-(t-2)\cdot 1(t-2)+1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3)=$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{3}{2}(t-2)\cdot 1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3).$$

Демек, $y''+4y=\dfrac{1}{2}t\cdot 1(t)-\dfrac{3}{2}(t-2)\cdot 1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3).$

Нөлдік бастапқы шартты операторлық теңдеу

$$p^2Y+4Y=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}-\frac{3}{2}\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}e^{-3p}.$$

түрінде жазылады. Теңдеуден $Y(p)$ кескінін табамыз:

$$Y(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+4)}-\frac{3}{2}\frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-2p}+\frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-3p}.$$

$Y(p)$ кескінінен $y(t)$ түпнұсқасына көшеміз:

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\right)\div\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

болғандықтан, кешігу теоремасы бойынша

$$y(t)=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)-\frac{3}{8}\left(t-2-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)1(t-2)+\frac{1}{4}\left(t-3-\frac{1}{2}\sin 2(t-3)\right)1(t-3)$$

болатынын аламыз.

Операциялық әдіс тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуде де қолданылады. Бұны мысал келтіре отырып талқылайық.

Мысал 108: $\begin{cases} x'=y-z, \\ y'=x+y, \\ z'=x+y; \end{cases}$

дифференциалдық теңдеулер жүйесінің $x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=3$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табыңыз.

Шешімі:

$$x=x(t)\div X(p)=X;\quad y=y(t)\div Y(p)=Y;\quad z=z(t)\div Z(p)=Z$$

болсын. Онда, берілген шарттар негізінде,

$$x'\div pX-1;\quad y'\div pY-2;\quad z'\div pZ-3$$

болатынын аламыз.

Берілген жүйеде бейнелерге көшу арқылы

$$\begin{cases} pX-Y+Z=1, \\ X-(p-1)Y=-2, \\ X+(1-p)Z=-3 \end{cases}$$

операторлық теңдеулер жүйесін аламыз. Осы алгебралық теңдеулер жүйесін шеше отырып

$$X(p)=\frac{p-2}{p(p-1)},$$

$$Y(p)=\frac{2p^2-p-2}{p(p-1)^2},$$

$$Z(p)=\frac{3p^2-2p-2}{p(p-1)}$$

кескіндерін аламыз.

Кескіндерден түпнұсқаларға өте отырып ізделінді $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ түпнұсқаларын аламыз:

$$X(p)=\frac{p-2}{p(p-1)}=\frac{2p-2-p}{p(p-1)}=\frac{2(p-1)}{p(p-1)}-\frac{p}{p(p-1)}=\frac{2}{p}-\frac{1}{p-1}\div 2-e^{t}=x(t),$$

$$Y(p)=\frac{2p^{2}-p-2}{p(p-1)^{2}}=-\frac{2}{p}+\frac{4}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^{2}}\div -2+4e^{t}-te^{t}=y(t),$$

$$Z(p)=\frac{3p^{2}-2p-2}{p(p-1)}=-\frac{2}{p}+\frac{5}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^{2}}\div -2+5e^{t}-te^{t}=z(t)$$

Жауабы: $x(t)=2-e^{t}$, $y(t)=-2+4e^{t}-te^{t}$, $z(t)=-2+5e^{t}-te^{t}$.

Сондай-ақ операциялық есептеулерді айнымалы коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді, дербес туындылы теңдеулерді, ақырлы айырымдағы теңдеулерді (айырымдық теңдеулерді) шешуде, қатарлардың қосындысын табуда, интегралдарды есептеуде қолдануға болады.

6.9 Есептер

№1. Анықтаманы қолданып келесі функциялардың кескінін табыңыз.

1) $f(t)=t+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}$;
2) $f(t)=t$;
3) $f(t)=\sin 3t$;
4) $f(t)=t\cdot e^{t}$.

№2. Түпнұсқалардың кескіндерін табыңыз:

1) $\cos^{2}\omega t$;
2) $\cos 2t\cdot\cos 4t$;
3) $e^{t}\cdot\cos nt$;
4) $t\cdot\sin\omega t$;
5) $e^{-t}\cdot\sin 2t\cdot\sin 4t$;
6) $e^{3t}\cdot\sin^{2}t$;
7) $\sin t-t\cdot\cos t$;
8) $\frac{e^{t}-1}{t}$;
9) $\sin^{3}t$;
10) $\sin t\cdot\cos 3t$;
11) $e^{2t}\cdot\sin t$;
12) $t\cdot\cos\omega t$;
13) $t\cdot\operatorname{sh} 3t$;
14) $t\cdot e^{t}\cdot\cos t$.
15) $\frac{\cos t-\cos 2t}{t}$;
16) $\sin^{2}t$;
17) $\frac{\sin 4t}{t}$;
18) $\sin 2t\cdot\sin 4t$;
19) $e^{-t}\cdot t^{3}$;
20) $t\cdot e^{t}$;
21) $t\cdot\left(e^{t}+\operatorname{ch} t\right)$;
22) $e^{-2t}\cdot\operatorname{ch} 3t$.

№3. Түпнұсқалардың кескіндерін табыңыз:

1) $f(t)=\begin{cases}0, & \text{егер } t<T,\\ 1, & \text{егер } T\le t<T+\tau,\\ 0, & \text{егер } t\ge T+\tau\end{cases}$

2) $f(t)=\begin{cases}0, & \text{егер } 0\le t<a,\\ t-a, & \text{егер } a\le t<b,\\ b-a, & \text{егер } t\ge b\end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases} t, & \text{егер} \quad 0 \le t < 1, \\ 2-t, & \text{егер} \quad 1 \le t < 2, \\ 0, & \text{егер} \quad t \ge 2 \end{cases}$

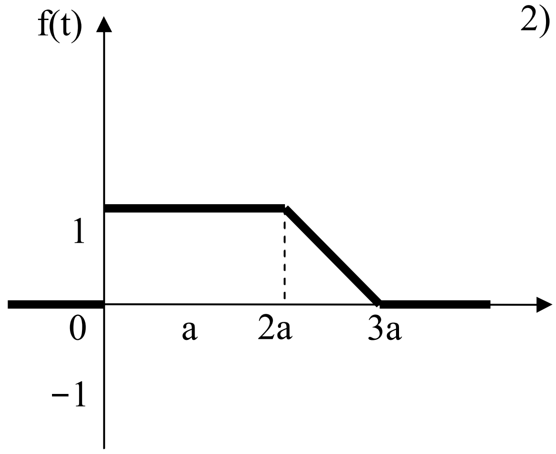
5) $f(t)=\begin{cases} 0, & \text{егер} \quad 0 \le t < 1, \\ t^2, & \text{егер} \quad 1 \le t < 2, \\ 0, & \text{егер} \quad t \ge 2 \end{cases}$

4) $f(t)=\begin{cases} \sin t, & \text{егер} \quad 0 \le t < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos t, & \text{егер} \quad \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi, \\ 0, & \text{егер} \quad t \ge \pi \end{cases}$

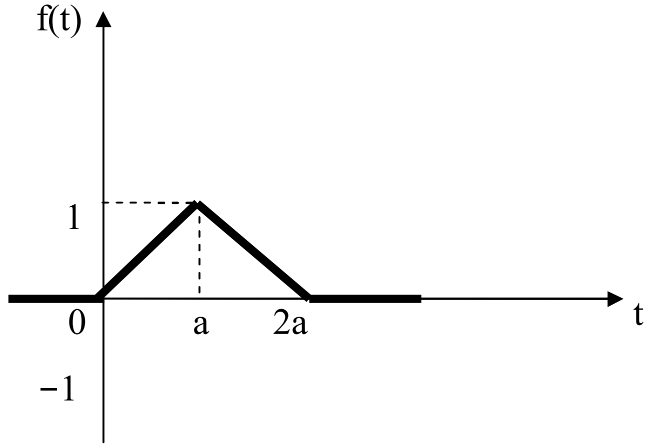
6) $f(t)=\begin{cases} 1, & \text{егер} \quad 0 \le t < a, \\ -1, & \text{егер} \quad a \le t < 2a, \\ 0, & \text{егер} \quad t \ge a \end{cases}$

№4. Келесі графиктермен көрсетілген түпнұсқалардың кескінін табыңыз:

1)



2)



№5. Кескіндердің түпнұсқаларын табыңыз:

1) $\dfrac{p^2}{(p-1)^3}$;

2) $\dfrac{1}{p} \cdot \cos \dfrac{1}{p}$;

3) $\dfrac{e^{-p}}{p \cdot (p-1)}$;

4) $\dfrac{p^2}{\left(p^2 - a^2\right)^2}$;

5) $\dfrac{e^{-3p}}{p+3}$;

6) $\dfrac{2e^{-p}}{p^3}$;

7) $\dfrac{p^3}{\left(p^2+4\right)^2}$;

8) $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sin \dfrac{1}{\sqrt{p}}$;

9) $\dfrac{p^3}{\left(p^2 - a^2\right) \cdot \left(p^2 - b^2\right)}$.

10) $\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$;

11) $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$;

12) $\frac{p^5}{p^6-1}$;

13) $\frac{p^2+1}{p^2\cdot\left(p^2-1\right)^2}$;

14) $\frac{p}{p^2+4p+5}$;

15) $\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$;

16) $\frac{p}{p^3+1}$;

17) $\frac{1}{p}\cdot e^{\frac{1}{p^2}}$;

18) $\frac{p^3}{\left(p^4-1\right)^2}$;

19) $\frac{1}{p^2-4p+3}$;

20) $\frac{p}{p^4-5p^2+4}$;

21) $\frac{1}{p+2p^2+p^3}$;

22) $\frac{3p^2}{\left(p^3-1\right)^2}$.

№6. Берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін табыңыз:

1) $x''+x=t\cdot\cos\ 2t;$; $\quad x(0)=x'(0)=0$;

2) $x''+x=t\cdot e^{t}+4\sin\ t;$ $\quad x(0)=x'(0)=0$;

3) $x''-2x'+2x=\sin\ t;$ $\quad x(0)=0,\ \ x'(0)=1$;

4) $x''+2x'+x=e^{-t};$ $\quad x(0)=1,\ \ x'(0)=0$;

5) $x'''+x=\frac{1}{2}t^2\cdot e^{t};$ $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0$;

6) $x''+3x'=e^{-3t};$ $\quad x(0)=0,\ \ x'(0)=-1$;

7) $x''+4x=\sin\ 2t;$ $\quad x(0)=1,\ \ x'(0)=-2$;

8) $x''+2x'+x=2\cos^2 t;$ $\quad x(0)=x'(0)=0$;

9) $x''-4x=\sin\ \frac{3t}{2}\sin\ \frac{t}{2};$ $\quad x(0)=1,\ \ x'(0)=0$;

10) $x'''+3x''+3x'+x=1;$ $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

7 ЖЕКЕ ОРЫНДАУ ЖҰМЫСТАРЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ

№1 Тапсырма

Берілген комплекс сандарының модулін, аргументін және аргументінің бас мәнін көрсетіп, тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін жазыңыз.

Тапсырма / ***Вариант***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
1	$2+i$	$-3+4i$	$-2,1-3i$	$7-2i$	$\sqrt{5}$	-5	$\sqrt{3}\,i$	$-0,5i$
2	$1+2i$	$-4+3i$	$-3-2,1i$	$2-7i$	$\sqrt{3}$	-3	$\sqrt{5}\,i$	$-1,5i$
3	$2+3i$	$-1+2i$	$-1,1-2i$	$1-6i$	$\sqrt{7}$	-2	$\sqrt{7}\,i$	$-2,5i$
4	$3+2i$	$-2+i$	$-2-1,1i$	$6-i$	$\sqrt{2}$	-7	$\sqrt{8}\,i$	$-3,5i$
5	$3+4i$	$-1+3i$	$-0,2-5i$	$1-2i$	$\sqrt{8}$	-8	$\sqrt{2}\,i$	$-4,5i$
6	$4+3i$	$-3+i$	$-5-0,2i$	$2-i$	$\sqrt{10}$	-10	$2\sqrt{3}\,i$	$-5,5i$
7	$1+3i$	$-1+4i$	$-0,3-4i$	$1-4i$	$2\sqrt{2}$	-4	$3\sqrt{2}\,i$	$-6,5i$
8	$3+i$	$-4+i$	$-4-0,3i$	$4-i$	$2\sqrt{3}$	-6	$2\sqrt{2}\,i$	$-7,5i$
9	$1+4i$	$-1+5i$	$-0,4-3i$	$1-5i$	$3\sqrt{2}$	-9	$4\sqrt{3}\,i$	$-8,5i$
10	$4+i$	$-5+i$	$-3-0,4i$	$5-i$	$2\sqrt{5}$	$-0,5$	$5\sqrt{2}\,i$	$-9,5i$
11	$1+5i$	$-2+3i$	$-0,5-i$	$1-3i$	$3\sqrt{3}$	-1	$3\sqrt{5}\,i$	$-10,5i$
12	$5+i$	$-3+2i$	$-1-0,5i$	$3-i$	$3\sqrt{5}$	$-1,5$	$3\sqrt{3}\,i$	$-11,5i$
13	$2+4i$	$-1+i$	$-0,6-2i$	$7-i$	$5\sqrt{3}$	$-2,5$	$5\sqrt{5}\,i$	$-1,8i$
14	$4+2i$	$-2+2i$	$-2-0,6i$	$1-7i$	$5\sqrt{5}$	$-3,5$	$5\sqrt{3}\,i$	$-2,6i$
15	$2+5i$	$-3+3i$	$-0,7-3i$	$6-3i$	$2\sqrt{7}$	$-4,5$	$7\sqrt{2}\,i$	$-3,3i$
16	$5+2i$	$-2+4i$	$-3-0,7i$	$3-6i$	$7\sqrt{2}$	$-5,5$	$2\sqrt{7}\,i$	$-4,8i$
17	$1+i$	$-2+5i$	$-0,7-4i$	$1-8i$	$3\sqrt{7}$	$-6,5$	$7\sqrt{3}\,i$	$-7,9i$
18	$2+2i$	$-4+4i$	$-4-1,1i$	$2-3i$	$4\sqrt{3}$	$-7,5$	$7\sqrt{7}\,i$	$-8,3i$
19	$3+3i$	$-4+2i$	$-5-0,9i$	$3-8i$	$2\sqrt{10}$	$-8,5$	$10\sqrt{2}\,i$	$-5,6i$
20	$4+4i$	$-2+6i$	$-0,9-5i$	$8-3i$	$10\sqrt{2}$	$-9,5$	$2\sqrt{10}\,i$	$-4i$
21	$2+6i$	$-5+5i$	$-1,1-6i$	$2-4i$	$5\sqrt{2}$	$-10,5$	$2\sqrt{5}\,i$	$-2i$
22	$6+2i$	$-3+5i$	$-6-1,1i$	$4-2i$	$5\sqrt{7}$	-11	$7\sqrt{5}\,i$	$-i$
23	$3+5i$	$-6+6i$	$-1,2-2i$	$7-3i$	$7\sqrt{3}$	$-11,5$	$3\sqrt{7}\,i$	$-3i$
24	$5+3i$	$-4+3i$	$-2-1,2i$	$3-7i$	$4\sqrt{2}$	-12	$8\sqrt{7}\,i$	$-5i$
25	$3+6i$	$-3+4i$	$-3-1,5i$	$3-4i$	$3\sqrt{10}$	$-12,5$	$10\sqrt{3}\,i$	$-6i$
26	$6+3i$	$-6+3i$	$-1,5-3i$	$4-3i$	$10\sqrt{3}$	-13	$3\sqrt{10}\,i$	$-7i$
27	$4+5i$	$-7+i$	$-4-0,5i$	$3-5i$	$7\sqrt{7}$	$-13,5$	$5\sqrt{7}\,i$	$-8i$
28	$5+4i$	$-1+7i$	$-0,5-4i$	$5-3i$	$6\sqrt{2}$	-14	$8\sqrt{2}\,i$	$-9i$
29	$5+6i$	$-2+6i$	$-1,5-5i$	$7-5i$	$8\sqrt{3}$	$-14,5$	$4\sqrt{5}\,i$	$-10i$
30	$6+5i$	$-6+2i$	$-5-1,5i$	$5-7i$	$6\sqrt{3}$	-15	$4\sqrt{7}\,i$	$-11i$

№2 Тапсырма

а) Есептеңіз;
б) Алгебралық түрде жазыңыз.

Вариант	***а***	***б***
1	$\arg(3-2i)^5$	$(2+2i)^2(1-i)^3$
2	$\arg\dfrac{2+2i}{-1+i}$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)^7$
3	$\arg(2+i\sqrt{3})^5$	$(2-2i)^4(3-i)^3$
4	$\arg\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15}$	$\dfrac{(1+i\sqrt{2})^2}{(1+i)^3}$
5	$\arg(3+i\sqrt{3})^8$	$\dfrac{(3+2i)^5}{2-i}$
6	$\arg\dfrac{3+2i}{i}$	$(2-3i)^{11}$
7	$\arg(2+i\sqrt{3})^8$	$\dfrac{(1-i)^8}{3+2i}$
8	$\arg\left(\dfrac{3-2i}{-2+3i}\right)$	$(5+2i)^6(3+4i)$
9	$\arg(3+i)(2-i)$	$\left(\dfrac{3+i\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$
10	$\arg\dfrac{3+2i}{4i}$	$\left(\dfrac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^{20}$
11	$\arg(2+2i)(1-i)$	$(1-i\sqrt{3})^5$
12	$\arg\dfrac{1+i}{1-2i}$	$(2+i)^{15}$
13	$\arg\dfrac{1-i}{2+i}$	$(1-3i)^7$
14	$\arg(-2+2i)^6$	$\dfrac{(1+i)^4}{(2-2i)^2}$

15	$\arg\dfrac{i}{3+i}$	$(1+i\sqrt{3})^{12}$
16	$\arg\dfrac{2i}{2-i}$	$(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^{6}$
17	$\arg\dfrac{1+i}{2-i}$	$(3-i\sqrt{7})^{4}$
18	$\arg\dfrac{2}{4-i}$	$(1-i\sqrt{5})^{5}$
19	$\arg\dfrac{3+i}{2i}$	$(2+3i)^2(4-i)^4$
20	$\arg(1+i)(3-i)$	$(1-i\sqrt{3})^{3}(2-i\sqrt{3})^{2}$
21	$\arg\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i}$	$(1+2i)^6$
22	$\arg\dfrac{i}{2-2i}$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$
23	$\arg(1-i\sqrt{3})^{6}$	$(1+2i)^2(1-i)^3$
24	$\arg\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{94}$	$\dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{(2+2i)^3}$
25	$\arg(1-i\sqrt{3})^{4}$	$\dfrac{(2+2i)^3}{(1-i)^2}$
26	$\arg\dfrac{1+i}{i}$	$(3-2i)^9$
27	$\arg(1+i\sqrt{3})^{7}$	$\dfrac{(1+i)^2}{(2-2i)^4}$
28	$\arg\left(\dfrac{1+i}{-2+2i}\right)$	$(4+2i)^4(5-i)^3$
29	$\arg(1+i)(4-i)$	$\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$
30	$\arg\dfrac{1-2i}{2i}$	$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$

№3 Тапсырма

Түбірдің мәндерін табыңыз.

Вариант	*а*	*б*
1	$\sqrt[3]{4-3i}$	$\sqrt{5i}$
2	$\sqrt{7i}$	$\sqrt[5]{1-i}$
3	$\sqrt{-10+4i}$	$\sqrt[3]{-27i}$
4	$\sqrt{-6+8i}$	$\sqrt[3]{i+3}$
5	$\sqrt{1+3i}$	$\sqrt[4]{-5}$
6	$\sqrt{2-i}$	$\sqrt[4]{4}$
7	$\sqrt{-4+3i}$	$\sqrt[3]{28}$
8	$\sqrt[5]{1+i}$	$\sqrt{-3+4i}$
9	$\sqrt{-3+3i}$	$\sqrt[6]{-1}$
10	$\sqrt{7-i}$	$\sqrt[3]{-16}$
11	$\sqrt{-1-i}$	$\sqrt[6]{81}$
12	$\sqrt[4]{-2+i}$	$\sqrt{-2i}$
13	$\sqrt[6]{-1-i\sqrt{3}}$	$\sqrt{-4+i}$
14	$\sqrt{2+i}$	$\sqrt[3]{3-3i}$
15	$\sqrt[4]{i}$	$\sqrt{6+2i}$
16	$\sqrt[4]{-3+5i}$	$\sqrt{24+7i}$
17	$\sqrt{-8-6i}$	$\sqrt[4]{3+4i}$
18	$\sqrt[4]{2+5i}$	$\sqrt{6-2i}$
19	$\sqrt{13+6i}$	$\sqrt[4]{12+5i}$
20	$\sqrt{9+i}$	$\sqrt[3]{5-i}$
21	$\sqrt[3]{3-4i}$	$\sqrt{2i}$
22	$\sqrt{3i}$	$\sqrt[4]{1-i}$
23	$\sqrt{-15+8i}$	$\sqrt[3]{-8i}$
24	$\sqrt{-8+6i}$	$\sqrt[3]{i-1}$
25	$\sqrt{1+i}$	$\sqrt[4]{-1}$

26	$\sqrt{2-i}$	$\sqrt[4]{4}$
27	$\sqrt{-4+i}$	$\sqrt[3]{27}$
28	$\sqrt[4]{1+i}$	$\sqrt{-2+i}$
29	$\sqrt{-4+4i}$	$\sqrt[5]{-1}$
30	$\sqrt{1-i}$	$\sqrt[3]{-20}$

№4 Тапсырма

Теңдеумен қандай сызық берілгенін анықтап, кескінін жазықтықта өрнектеңіз.

Вариант	***Теңдеу***
1	$z = a(\cos t + i\sin t), \quad a > 0, \quad 0 \le t < 2\pi$
2	$z = t^2 + i\frac{1}{t^2}, \ (-\infty < t < 0) \cup (0; +\infty)$
3	$\lvert z-2 \rvert = 4\lvert z+1 \rvert$
4	$\operatorname{Re} z^2 = a^2, \quad a > 0$
5	$z = 2 + te^{\frac{\pi}{4}i}, \quad -\infty < t < +\infty$
6	$z = \rho e^{it}, \quad \rho > 0, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$
7	$z = t + \frac{i}{t}, \ t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
8	$z = -t + i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \le t \le 0$
9	$z = 2e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$
10	$z = 2i(1 + e^{-it}), \quad 0 \le t \le 2\pi$
11	$z = -3i + e^{it}, \quad t \in [0; 2\pi)$
12	$z = z_0 + ae^{it}, \quad a > 0, \ z_0 \in G, \quad t \in [0; 2\pi]$
13	$\lvert z+3 \rvert = \lvert z-1 \rvert$
14	$z = 2 + 2(\cos t + i\sin t)$
15	$z = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \le t \le 1$

16	$z = \mathrm{R}e^{it} + re^{-it}, \quad 0 \le t \le \pi, \quad R > r$
17	$\lvert z-2\rvert + \lvert z+2\rvert = 5$
18	$z = (1+i)t^2 + 1, \quad t \in R$
19	$z = t^2 - \frac{i}{t}, \; t > 0$
20	$\lvert z-2\rvert = \lvert 1-2\bar{z}\rvert$
21	$\lvert z-2\rvert = 6\lvert z+1\rvert \,\lvert$
22	$z = 3 + te^{\frac{\pi}{2}i}, \quad -\infty < t < +\infty$
23	$z = i + 2e^{it}, \quad 3\pi \le t \le 5\pi$
24	$z = 4i(1+e^{-it}), \quad 0 \le t \le 2\pi$
25	$z = -7i + e^{it}, \quad 0 \le t < 2\pi$
26	$z = 3\mathrm{ch}2t + i\,2\mathrm{sh}2t$
27	$z = t + i\sqrt{3-t^2}, \quad -1 \le t \le 0$
28	$\lvert\lvert z-1\rvert - \lvert z+1\rvert\rvert = 8$
29	$z = 5e^{it}, \quad \pi \le t \le 2\pi$
30	$z = 2e^{it}, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

№5 Тапсырма

Комплекс жазықтықта теңсіздіктермен берілген облысты көрсетіңіз.

Вариант	***Сандар жиыны***
1	$\{z: \lvert z-2i\rvert<2, \lvert z-i\rvert>1, 0<\arg z<\frac{\pi}{3}\}$
2	$\{z: 0<\arg (z-1)<\frac{\pi}{2}\}$
3	$\{z: \left\lvert\frac{z+1}{z-3}\right\rvert \le 1\}$
4	$\{z: \lvert z-1\rvert < 1, \quad 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}\}$
5	$\{z: \lvert z-2+i\rvert \ge 3, \; \lvert z-i\rvert \le 2\}$
6	$\{z: \lvert z\rvert \le \lvert z-2\rvert\}$

7	{z: |z|+Re z≤1, $\frac{\pi}{2}$<arg z<π}
8	{z: -2<Im $\frac{z-i}{z}$ <6}
9	{z: Im (1+z)-|z|<0}
10	{z: Re (z–2)+|z|>0}
11	{z: Re iz<2, 0<arg z< $\frac{\pi}{3}$ }
12	{z: |z–2i|>2, |z-i|<1, 0<arg z< $\frac{\pi}{3}$ }
13	{z: |z+2i|≥2, |z+i|≤ $\frac{3}{2}$, $\frac{\pi}{2}$<arg z<π}
14	{z: 0<arg (z-i)< $\frac{\pi}{4}$, Re z>0}
15	{z: |z|+Imz≤1, $\frac{\pi}{2}$<arg z<π}
16	{z: $\left\|\frac{z+1}{z-i}\right\|$ ≥2, 0<arg (z-1)< $\frac{\pi}{2}$ }
17	{z: $\frac{\pi}{6}$<arg (z+2i)< $\frac{\pi}{2}$ }
18	{z: $\left\|\frac{z-3}{z-2}\right\|$ ≥1}
19	{z: $4 \le \|z-1\| + \|z+1\| \le 8$}
20	{z: $\left\|\frac{z-1}{z+3}\right\|$ >2}
21	{z: |z|≤|z-3|}
22	{z: -1<Im $\frac{z-i}{z}$ <5}
23	{z: $\arg(z-1) > \frac{\pi}{4}$ }
24	{z: |z–2+i|≥3, Im z>0}
25	{z: |z–i|+|z+i|≥4, Im z<0}

26	{z: $\frac{1}{4}$ <Re $\frac{1}{\bar{z}}$ +Im $\frac{1}{\bar{z}}$ < $\frac{1}{2}$ }
27	{z: 0<arg $\frac{i-z}{i+z}<\frac{\pi}{2}$ }
28	{z: Re (1+z)-|z|<0}
29	{z: Im (z–2)+|z|>0}
30	{z: |z|≤|z-1|}

№6 Тапсырма

e^z, $\sin z$, $\cos z$, shz, chz, $\ln z$, Lnz, z^a сандарын алгебралық түрде жазыңыз.

Вариант	z	a	***Вариант***	z	a
1	$2+2i$	$2+i$	16	$-2-2i$	$5+2i$
2	$\sqrt{3}+i$	$1+2i$	17	$-2\sqrt{3}-2i$	$1+i$
3	$-3+3i$	$2+3i$	18	$-\sqrt{3}+i$	$2+2i$
4	$1-\sqrt{3}i$	$3+2i$	19	$4-4i$	$3+3i$
5	$-1+i$	$3+4i$	20	$1+i$	$4+4i$
6	$2\sqrt{3}-2i$	$4+3i$	21	$-2+2i$	$2+6i$
7	$-4+4i$	$1+3i$	22	$-1-\sqrt{3}i$	$6+2i$
8	$3\sqrt{3}+3i$	$3+i$	23	$3\sqrt{3}-3i$	$3+5i$
9	$-\sqrt{3}-i$	$1+4i$	24	$4+4i$	$5+3i$
10	$4-4i$	$4+i$	25	$2\sqrt{3}+2i$	$3+6i$
11	$-4-4i$	$1+5i$	26	$2-2i$	$6+3i$
12	$-2\sqrt{3}+2$	$5+i$	27	$-3+3i$	$4+5i$
13	$-3-3i$	$2+4i$	28	$3+3i$	$5+4i$
14	$-1+\sqrt{3}$	$4+2i$	29	$1+\sqrt{3}i$	$5+6i$
15	$-1-i$	$2+5i$	30	$\sqrt{3}-i$	$6+5i$

№7 Тапсырма

Функциялардың туындыларын табыңыз.

Вариант	***Функция***	***Вариант***	***Функция***
1	$f(z)=\frac{sh^2 z}{z}$	2	$f(z)=\frac{\sin z}{z}$

3	$f(z)=z^2\sin z$	12	$f(z)=z^4+4z^2$
4	$f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z}$	13	$f(z)=\cos\dfrac{z}{3}+e^z$
5	$f(z)=\cos z^3$	14	$f(z)=ctgz+\sin z$
6	$f(z)=1+chz$	15	$f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$
7	$f(z)=z^3\cos z$	16	$f(z)=z^4+9z^2$
8	$f(z)=(z^2+4)(1+e^z)$	17	$f(z)=\sin z^3$
9	$f(z)=\dfrac{1}{tgz+ctgz}$	18	$f(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{z}$
10	$f(z)=tgz+\cos z$	19	$f(z)=4+shz$
11	$f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$	20	$f(z)=\dfrac{ch^2z}{z}$

21	$f(z)=4\cos z^5$	26	$f(z)=\left(z^2+1\right)^2 chz$
22	$f(z)=z\cos 3z$	27	$f(z)=4-e^z$
23	$f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}$	28	$f(z)=\dfrac{4-e^z}{z}$
24	$f(z)=\left(z^2+9\right)(1+z)$	29	$f(z)=1+\sin z$
25	$f(z)=\dfrac{(1-shz)^3}{z}$	30	$f(z)=\left(z^2+3\right)^2 cthz$

№8 Тапсырма

Нақты немесе жорамал бөліктерінің бірі арқылы берілген шартты қанағаттандыратын $W=U+iV$ аналитикалық функциясын тұрғызыңыз.

Вариант	***U немесе V***	***Шарт***
1	$U=x^2+2xy+3y^2$	W(1)=0
2	$V=3x^2+2xy+y^2$	W(0)=0
3	$U=x^2+3xy+4y^2$	W(-1)=0
4	$V=4x^2+3xy+y^2$	W(0)=0
5	$U=2x^2+3xy+4y^2$	W(1)=0
6	$V=4x^2+3xy+2y^2$	W(1)=i
7	$U=3x^2+2xy+4y^2$	W(i)=-i
8	$V=4x^2+2xy+3y^2$	W(1)=i
9	$U=2x^2+xy+y^2$	W(1)=2

10	$V = x^2 + xy + 2y^2$	W(1)=1
11	$U = x^2 + 4xy + 3y^2$	W(i)=1
12	$V = 3x^2 + 4xy + y^2$	W(0)=0
13	$U = x^2 + 5xy + 4y^2$	W(0)=i
14	$V = 4x^2 + 5xy + y^2$	W(0)=0
15	$U = 2x^2 + 6xy + 3y^2$	W(1)=0
16	$V = 3x^2 + 6xy + 2y^2$	W(1)=0
17	$U = 3x^2 + 7xy + 4y^2$	W(0)=2i
18	$V = 4x^2 + 7xy + 3y^2$	W(0)=i
19	$U = 2x^2 + 8xy + y^2$	W(1)=3
20	$V = x^2 + 8xy + 2y^2$	W(0)=0
21	$U = 2x^2 - 3xy + 4y^2$	W(1)=0
22	$V = 4x^2 - 3xy - 2y^2$	W(1)=i
23	$U = 3x^2 - 2xy + 4y^2$	W(i)=-i
24	$V = 4x^2 - 2xy - 3y^2$	W(1)=i
25	$U = 2x^2 - xy + y^2$	W(1)=2
26	$V = x^2 - xy - 2y^2$	W(1)=1
27	$U = x^2 - 4xy + 3y^2$	W(i)=1
28	$V = 3x^2 - 4xy - y^2$	W(0)=0
29	$U = x^2 - 5xy + 4y^2$	W(0)=i
30	$V = 4x^2 + 5xy - y^2$	W(0)=0

№9 Тапсырма

$\int\limits_{OAB} f(z)dz$ интегралын OAB сынық сызығы бойынша есептеңіз.

Вариант	***f(z)***	**0**	**A**	**B**
1	$\sin z + z^5$	$(0;0)$	$(1;0)$	$(0;2)$
2	$z^9 + 1$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;1)$
3	$\cos z - z\sin z$	$(0;0)$	$(0{,}5;0{,}5)$	$(0;1)$
4	$\sin z + z\cos z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;1)$
5	$z^2 + 1$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;1)$
6	$ze^z + e^z$	$(0;0)$	$(0{,}5;0{,}5)$	$(0;1)$
7	$e^z \sin z + e^z \cos z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;1)$
8	$z^3e^{z^4}$	$(0;0)$	$(1;0)$	$(0;0)$
9	$\cos z - z\sin z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;-1)$
10	$\sin z + z\cos z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;1)$
11	$\lvert z\rvert$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(1;1)$
12	$ze^z + e^z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;-1)$
13	$e^z \sin z + e^z \cos z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;1)$
14	$chz + \cos iz$	$(0;0)$	$(-1;0)$	$(0;1)$
15	$\sin z + z\cos z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;-1)$
16	$\cos z - z\sin z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;-1)$
17	$z^2 + \cos z$	$(0;0)$	$(1;0)$	$(0;1)$
18	$ze^z + e^z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;1)$
19	$e^z \sin z + e^z \cos z$	$(0;0)$	$(0{,}5;0{,}5)$	$(0;1)$
20	$z^2 + \sin z$	$(0;0)$	$(-1;0)$	$(0;1)$
21	$\cos z - z\sin z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;1)$
22	$\sin z + z\cos z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;-1)$
23	$2z^2 + 1$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;-1)$
24	$ze^z + e^z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;-1)$
25	$\cos z - z\sin z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;1)$
26	$\sin z + z\cos z$	$(0;0)$	$(0{,}5;0{,}5)$	$(0;1)$
27	$shz + \cos iz$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;-1)$
28	$e^z \sin z + e^z \cos z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;-1)$

29	$e^z \sin z + e^z \cos z$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(0;-1)$
30	$ze^z + e^z$	$(0;0)$	$(-1;1)$	$(0;1)$

№10 Тапсырма

$\int_{\Gamma} f(z)dz$ интегралын А нүктесін В нүктесімен қосатын Г қисығы бойынша есептеңіз.

Вариант	***f(z)***	Г	***A(x,y)***	***B(x,y)***
1	$\bar{z}^2$	$y = x^2$	A(0, 0)	B(1, 1)
2	$3z^2 + 2z$	$y = x^2$	A(0, 0)	B(1, 1)
3	zImz	$x^2 + y^2 = 4$	A(2, 0)	B(-2, 0)
4	$\|z\|^2$ Rez	$x^2 + y^2 = 4$	A(0, 2)	B(-2, 0)
5	zRez	y = 2x	A(1, 2)	B(2, 4)
6	$z^2 + 7z + 1$	АВ-кесінді	A(1, 0)	B(1, -1)
7	$e^{\|z\|^2} \operatorname{Im} z$	АВ-кесінді	A(1, 1)	B(0, 0)
8	zRez	$y=x^2/2$	A(2, 2)	B(4, 8)
9	zImz	y = x	A(1, 1)	B(2, 2)
10	$2z + 1$	$y=x^3$	A(0, 0)	B(1, 1)
11	$\|z\|^2$ Rez	$x^2 + y^2 = 4$	A(2, 0)	B(0, 2)
12	zRez	y = 4x	A(0, 0)	B(1, 4)
13	zImz	$y = x^2$	A(1, 1)	B(2, 4)
14	$z\operatorname{Im} z^2$	АВ-кесінді	A(0, 0)	B(1, 1)
15	$\|z\|^2$ Rez	$x^2 + y^2 = 4$	A(-2, 0)	B(0,-2)
16	$\bar{z}^2$	АВ-кесінді	A(0, 0)	B(1, 1)
17	zRez	$y = x^2$	A(1, 1)	B(2, 4)
18	zImz	y = 2x	A(1, 2)	B(2, 4)
19	$12z^5 + 4z^3 + 1$	АВ-кесінді	A(1, 0)	B(0, 1)
20	zImz	$x^2 + y^2 = 4$	A(-2, 0)	B(0, -2)
21	zRez	$x^2 + y^2 = 4$	A(2,0)	B(0, 2)
22	$\operatorname{Im} z^3$	АВ-кесінді	A(0, 0)	B(2, 2)
23	$z\operatorname{Re} z^2$	АВ-кесінді	A(0, 0)	B(1, 2)
24	zRez	y = 3x	A(1, 3)	B(0, 0)
25	zRez	y = x/2	A(2, 1)	B(4, 2)
26	zRez	y = x/3	A(3, 1)	B(0, 0)
27	zImz	$x^2 + y^2 = 4$	A(0, -2)	B(2, 0)
28	zRez	y = x	A(0, 0)	B(1, 1)
29	$\|z\|^2$ Rez	$x^2 + y^2 = 4$	A(0, -2)	B(2, 0)
30	$\|z\|^2$ Rez	$x^2 + y^2 = 4$	A(2, 0)	B(-2, 0)

№11 Тапсырма

$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ тұйық контурлы интегралын Кошидің интегралдық теоремасын немесе формуласын қолданып есептеңіз.

Вариант	***Функция***	***Г***
1	$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z^3-1)}$	|z|=2
2	$f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$	|z|=3
3	$f(z)=\dfrac{z-5}{(z-i)^2(2z-1-i)}$	|z|=2
4	$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$	|z+1|=1
5	$f(z)=\dfrac{z+5}{(z^2-1)^2(z-\frac{1}{2})^2}$	|z-1|=1
6	$f(z)=\dfrac{z+1}{z(z^2+4)}$	|z-1-i|=6
7	$f(z)=\dfrac{z^2-1}{(z+2)(z^2+4)}$	|z|=3
8	$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$	|z+1-i|= $\sqrt{2}$
9	$f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+3)z^3}$	|z-1|=2
10	$f(z)=\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$	|z|=2
11	$f(z)=\dfrac{z+1}{z(z^2+4)}$	|z-2i|=3
12	$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$	$x^2+y^2=2x$
13	$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z+1)}$	|z|=2
14	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^3}$	|z-1|= $\dfrac{3}{2}$
15	$f(z)=\dfrac{1}{(z+3i)^2(z-5i)}$	|z|=3,5
16	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+3)}$	|z|=2

17	$f(z)=\dfrac{1}{(z-5i)^2(z+7i)}$	|z|=6
18	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z-i)^2}$	|z|=2
19	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z+i)^3}$	|z|=2
20	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+2)(z-i)^3}$	|z|= $\frac{3}{2}$
21	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$	|z+i|=3
22	$f(z)=\dfrac{z^3}{(z+5)(z-1)}$	|z|=2
23	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}$	|z|=4
24	$f(z)=\dfrac{z-2}{z^2-2z+1}$	|z-1|=2
25	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$	|z-2i|=2
26	$f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)^2(z+5)}$	|z|=3
27	$f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+6i)}$	|z|=4
28	$f(z)=\dfrac{1}{(z+2i)^2(z+5i)}$	|z|=4
29	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+5i)}$	|z|=4
30	$f(z)=\dfrac{1}{(z+4i)^2(z+6i)}$	|z|=5

№12 Тапсырма

Берілген функцияны берілген сақинада Лоран қатарына жіктеңіз.

Вариант	***Функция***	***Сақина***
1	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$	|z|>3
2	$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-6)^2}$	2<|z|<6

3	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-2)(z-4)^2}$	2<|z|<4
4	$f(z)=\dfrac{1}{(z-5)(z^2-1)^2}$	1<|z|<5
5	$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+7)^2}$	0<|z|<7
6	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+9)^2}$	1<|z|<3
7	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-5)}$	1<|z|< $\sqrt{5}$
8	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-3)(z-3)^2}$	$\sqrt{3}$ <|z|<3
9	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$	1<|z|<2
10	$f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-7)}$	|z|>7
11	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-2)(z^2-4)}$	$\sqrt{2}$ <|z|<2
12	$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+3)^2}$	0<|z|<3
13	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)^2}$	1<|z|<2
14	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+2)(z^2-4)}$	$\sqrt{2}$ <|z|<2
15	$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z+4)}$	|z|>4
16	$f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z+3)}$	|z|>3
17	$f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$	|z|>2
18	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$	|z|>2
19	$f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$	|z|>3
20	$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)}$	2<|z|<4

21	$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2(z+3)}$	2<|z|<3
22	$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-4)^2}$	1<|z|<4
23	$f(z)=\frac{1}{(z^2-3)(z^2+2)}$	$\sqrt{2}$ <|z|< $\sqrt{3}$
24	$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z-2)^2}$	1<|z|<2
25	$f(z)=\frac{1}{(z-4)(z^2-1)^2}$	1<|z|<4
26	$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-3)^2}$	1<|z|<3
27	$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2-2)}$	1<|z|< $\sqrt{2}$
28	$f(z)=\frac{1}{(1-z^2)(z^2+3)^2}$	1<|z|< $\sqrt{3}$
29	$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2-3)}$	1<|z|< $\sqrt{3}$
30	$f(z)=\frac{1}{(z^2-2)(z-3)^2}$	$\sqrt{2}$ <|z|<3

№13 Тапсырма

Функциялардың нөлдерін тауып, олардың ретін анықтаңыз.

Вариант	***Функция***	***Вариант***	***Функция***
1	$f(z)=\frac{\sin z}{z}$	9	$f(z)=z^2\sin z$
2	$f(z)=z^4+4z^2$	10	$f(z)=\frac{sh^2 z}{z}$
3	$f(z)=1+chz$	11	$f(z)=(z+\pi i)chz$
4	$f(z)=(z+\pi i)shz$	12	$f(z)=\cos z^3$
5	$f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$	13	$f(z)=\cos z+chiz$
6	$f(z)=\frac{\cos z}{z}$	14	$f(z)=z^3\cos z$
7	$f(z)=\sin z^3$	15	$f(z)=(z^2+4)(1+e^z)$

8	$f(z)=4+shz$	16	$f(z)=\frac{(1-chz)^2}{z^2}$
17	$f(z)=\frac{(1-shz)^2}{z}$	24	$f(z)=\sin z+shiz$
18	$f(z)=\frac{ch^2 z}{z}$	25	$f(z)=z^4+9z^2$
19	$f(z)=(z^2+1)^2 chz$	26	$f(z)=4\cos z^5$
20	$f(z)=4-e^z$	27	$f(z)=z+chiz$
21	$f(z)=1+\sin z$	28	$f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$
22	$f(z)=\frac{4-e^z}{z}$	29	$f(z)=(z^2+9)(1+z)$
23	$f(z)=(z^2+3)^2 cthz$	30	$f(z)=\frac{(1-shz)^3}{z}$

№14 Тапсырма

а) Функциялардың айрықша нүктелерін табыңыз және оларды сипаттаңыз;
б) $z=\infty$ нүктесін сипаттаңыз.

Вариант	***Функция***	***Вариант***	***Функция***
1	$\frac{1}{z-z^3}$	8	$e^{tg\frac{1}{z}}$
2	$\sin\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$	9	$\frac{ctgz}{z^2}$
3	$\frac{z^5}{(1-z)^2}$	10	$\frac{1}{z(z^2+4)^2}$
4	$\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$	11	$\frac{1-e^z}{2+e^z}$
5	$\frac{e^z}{1+z^2}$	12	$\frac{z^2+1}{e^z}$
6	ze^{-z}	13	$\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$
7	$\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$	14	thz

15	$e^{-\frac{1}{z^2}}$	23	$ze^{\frac{1}{z}}$
16	$e^{ctg\frac{1}{z}}$	24	$e^{-z}\cos\frac{1}{z}$
17	$\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$	25	$ctg\frac{1}{z}-\frac{1}{z}$
18	$ctg\frac{1}{z}$	26	$\frac{z^7}{\left(z^2-4\right)^2\cos\frac{1}{z-2}}$
19	$\sin\frac{1}{1-z}$	27	$\frac{1}{\cos z+\cos a}$
20	$\frac{1}{\sin z-\sin a}$	28	$ctgz-\frac{2}{z}$
21	$\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$	29	$e^{z-\frac{1}{z}}$
22	$\frac{\cos z}{z^2}$	30	tg^2z

№15 Тапсырма

Функциялардың айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

Вариант	***Функция***	***Вариант***	***Функция***
1	$f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}$	7	$f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$
2	$f(z)=\frac{1}{z\left(1-z^2\right)}$	8	$f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$
3	$f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^2}$	9	$f(z)=\frac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$
4	$f(z)=\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$	10	$f(z)=\frac{z^2}{(z-2)^3}$
5	$f(z)=\frac{z+i}{z-i}$	11	$f(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}$
6	$f(z)=\frac{z+1}{z^2}$	12	$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$

13	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$	22	$f(z)=tgz$
14	$f(z)=\dfrac{1}{z\left(4-z^2\right)}$	23	$f(z)=\dfrac{z^2}{(z-3)^3}$
15	$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)}$	24	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$
16	$f(z)=\sin z\sin\dfrac{1}{z}$	25	$f(z)=\dfrac{z-1}{z^2}$
17	$f(z)=ctg^3z$	26	$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+4\right)}$
18	$f(z)=\cos\dfrac{1}{z-2}$	27	$f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$
19	$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$	28	$f(z)=ctg^2z$
20	$f(z)=\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$	29	$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$
21	$f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$	30	$f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$

№16 Тапсырма

$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ тұйық контурлы интегралын шегерме туралы теореманы қолданып есептеңіз.

Вариант	***Функция***	***Г***
1	$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z^3-1)}$	|z|=2
2	$f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$	|z|=3
3	$f(z)=\dfrac{z-5}{(z-i)^2(2z-1-i)}$	|z|=2
4	$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$	|z+1|=1
5	$f(z)=\dfrac{z+5}{(z^2-1)^2(z-\frac{1}{2})^2}$	|z-1|=1

6	$f(z)=\dfrac{z+1}{z(z^2+4)}$	$\lvert z-1-i\rvert=6$
7	$f(z)=\dfrac{z^2-1}{(z+2)(z^2+4)}$	$\lvert z\rvert=3$
8	$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$	$\lvert z+1-i\rvert=\sqrt{2}$
9	$f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+3)z^3}$	$\lvert z-1\rvert=2$
10	$f(z)=\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$	$\lvert z\rvert=2$
11	$f(z)=\dfrac{z+1}{z(z^2+4)}$	$\lvert z-2i\rvert=3$
12	$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$	$x^2+y^2=2x$
13	$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z+1)}$	$\lvert z\rvert=2$
14	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^3}$	$\lvert z-1\rvert=\dfrac{3}{2}$
15	$f(z)=\dfrac{1}{(z+3i)^2(z-5i)}$	$\lvert z\rvert=3,5$
16	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+3)}$	$\lvert z\rvert=2$
17	$f(z)=\dfrac{1}{(z-5i)^2(z+7i)}$	$\lvert z\rvert=6$
18	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z-i)^2}$	$\lvert z\rvert=2$
19	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z+i)^3}$	$\lvert z\rvert=2$
20	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+2)(z-i)^3}$	$\lvert z\rvert=\frac{3}{2}$
21	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$	$\lvert z+i\rvert=3$
22	$f(z)=\dfrac{z^3}{(z+5)(z-1)}$	$\lvert z\rvert=2$

23	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}$	$\|z\|=4$
24	$f(z)=\dfrac{z-2}{z^2-2z+1}$	$\|z-1\|=2$
25	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$	$\|z-2i\|=2$
26	$f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)^2(z+5)}$	$\|z\|=3$
27	$f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+6i)}$	$\|z\|=4$
28	$f(z)=\dfrac{1}{(z+2i)^2(z+5i)}$	$\|z\|=4$
29	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+5i)}$	$\|z\|=4$
30	$f(z)=\dfrac{1}{(z+4i)^2(z+6i)}$	$\|z\|=5$

№17 Тапсырма

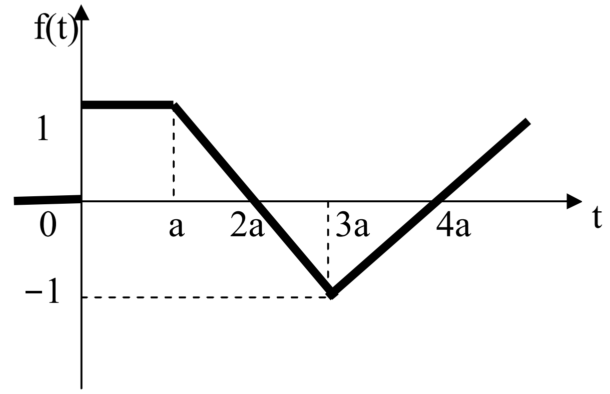
Берілген түпнұсқалар үшін олардың кескіндерін табыңыз.

Вариант	**Түпнұсқа**	**Вариант**	**Түпнұсқа**
1	$\sin^3 t$	16	$\cos^3 t$
2	$te^{\alpha t}\sin\beta t$	17	$(t+1)\sin 2t$
3	$e^{2t}\sin t$	18	$\sin t - t\cos t$
4	$ch\,3t$	19	$\cos^4 t$
5	$cht\sin t$	20	$\cos\beta t$
6	$t\,e^t$	21	$2\sin t-\cos t$
7	$\sin 3t$	22	$t\ sh\,3t$
8	$ch^3 t$	23	$te^{\alpha t}\cos\beta t$
9	$\sin\ 4t$	24	$e^{-t}\sin^2 t$
10	$\frac{1}{2}(cht\sin t+sht\cos t)$	25	$\frac{6}{t^2}\sin^2 t$
11	$t(e^t+cht)$	26	$e^{5t}\cos t$
12	$sh^3 t$	27	$(t^2+3)\cos 3t$
13	$t+\frac{1}{2}e^{-t}$	28	$\frac{sh\ 2t}{t\ +\ 1}$
14	$sht\cos t$	29	$\sin^4 t$
15	$\frac{t^3}{8}\cos^2 t$	30	$\frac{2}{t}+4e^t$

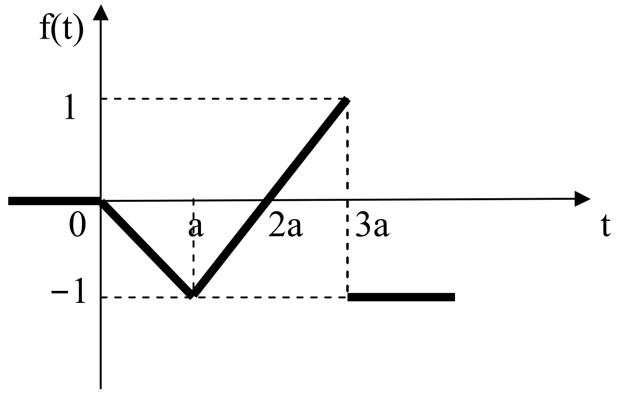
№18 Тапсырма

Келесі графиктермен көрсетілген түпнұсқалардың кескінін табыңыз:

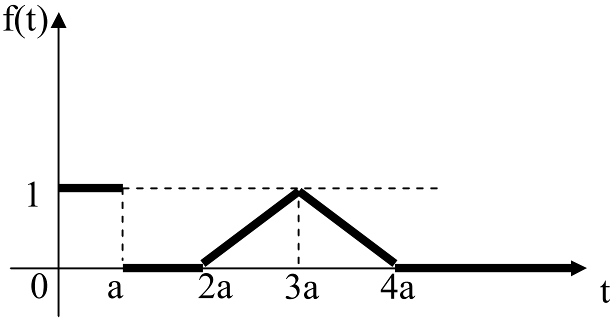
18.1



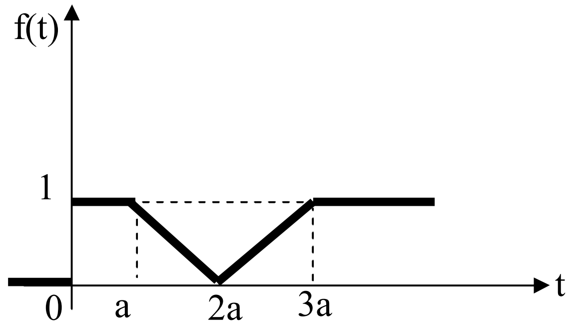
18.2



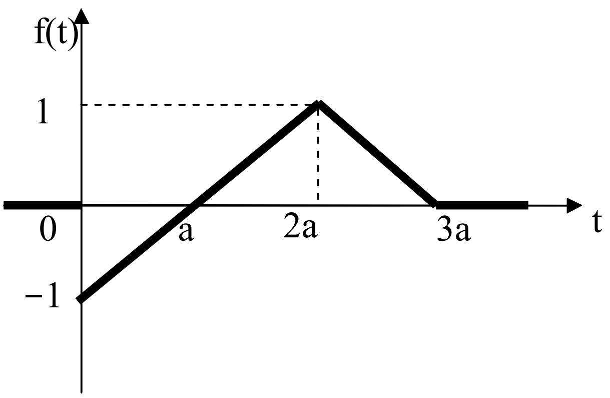
18.3



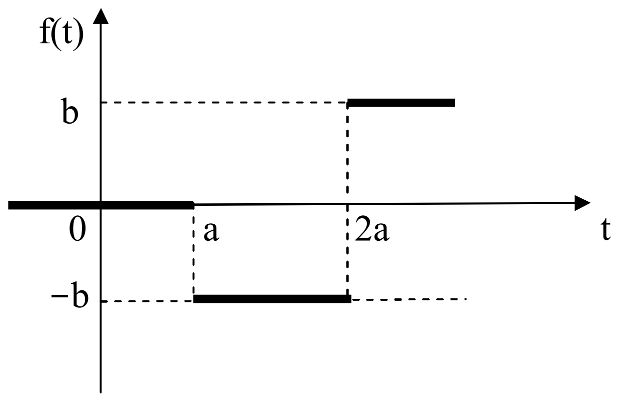
18.4



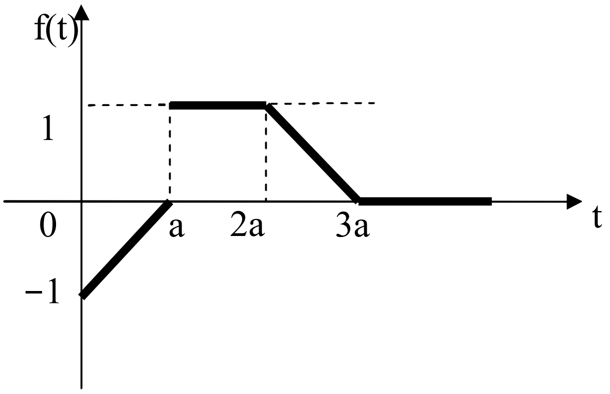
18.5



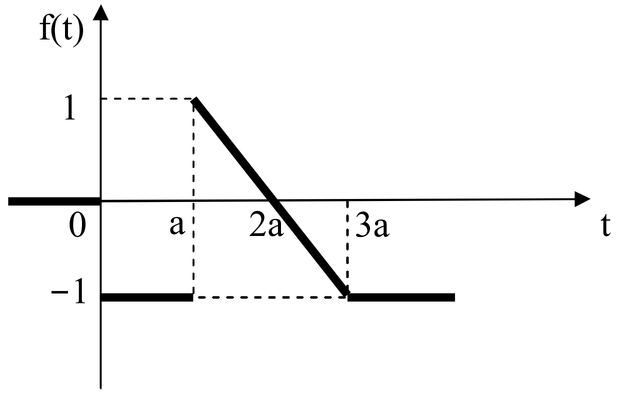
18.6



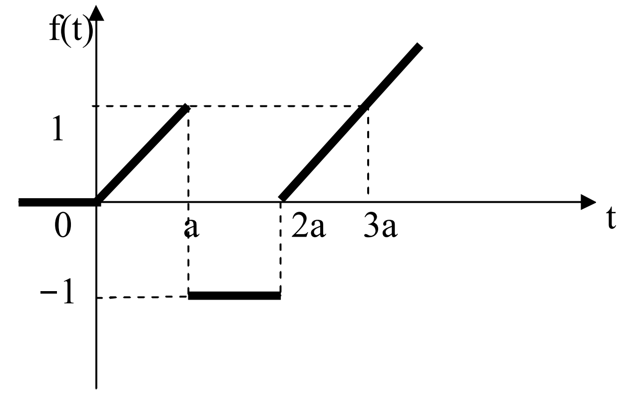
18.7



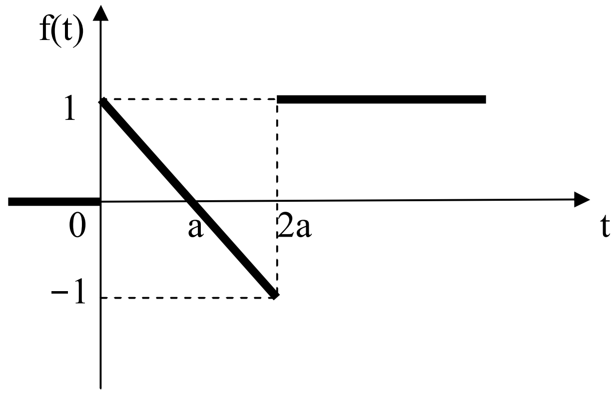
18.8



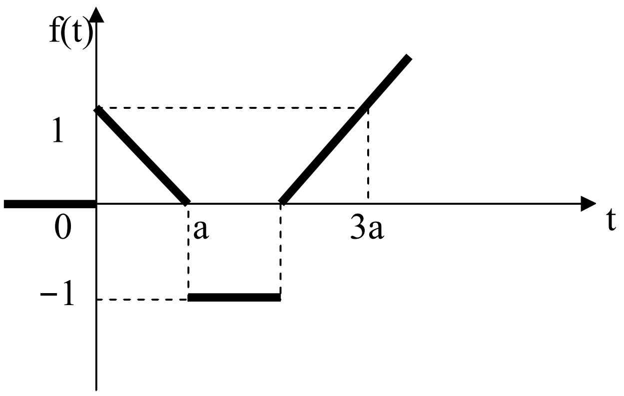
18.9



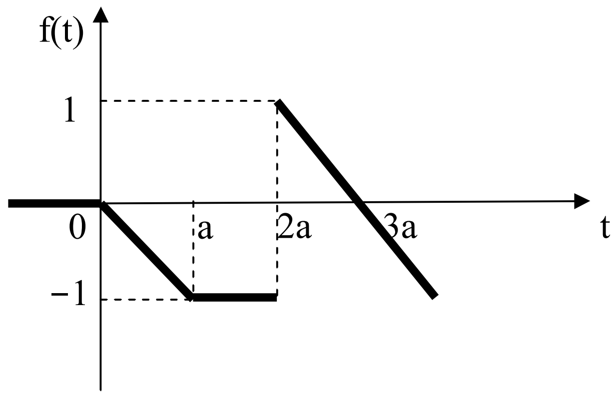
18.10



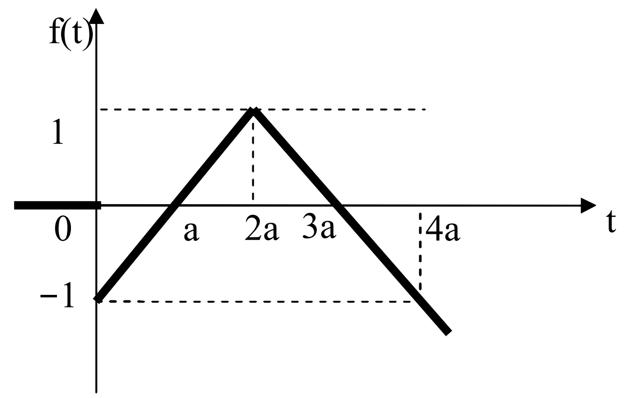
18.11



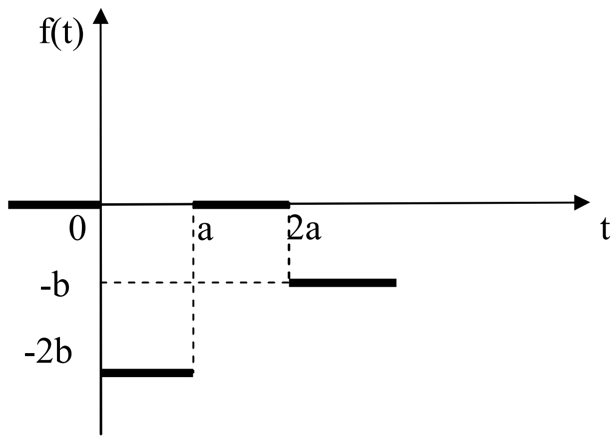
18.12



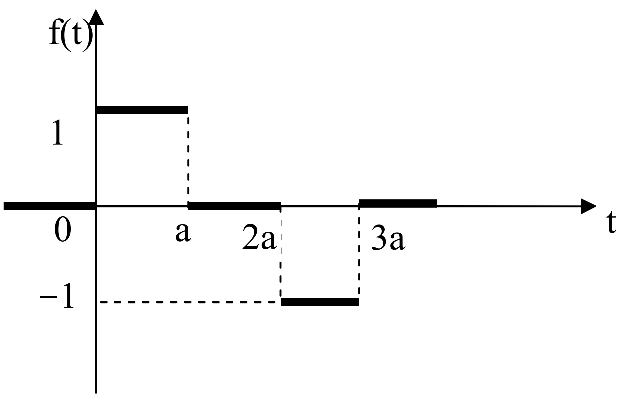
18.13



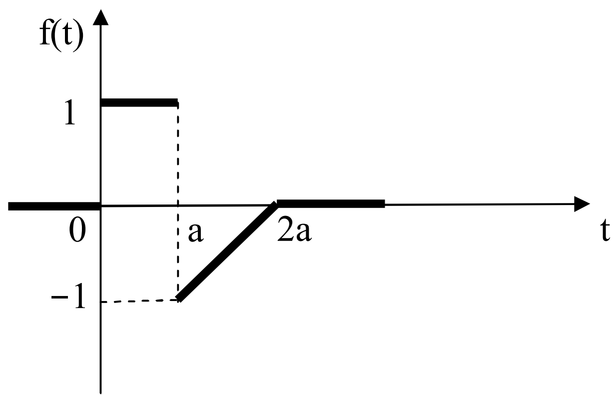
18.14



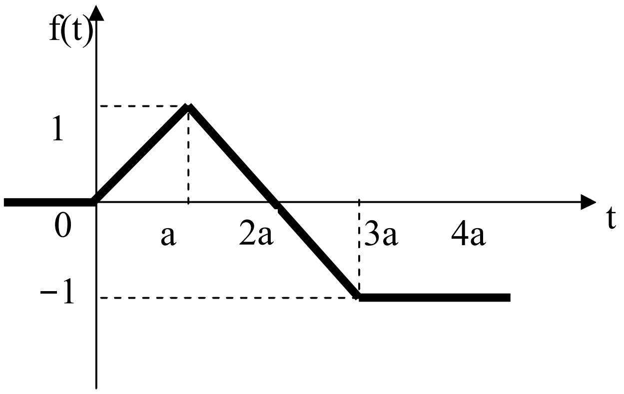
18.15



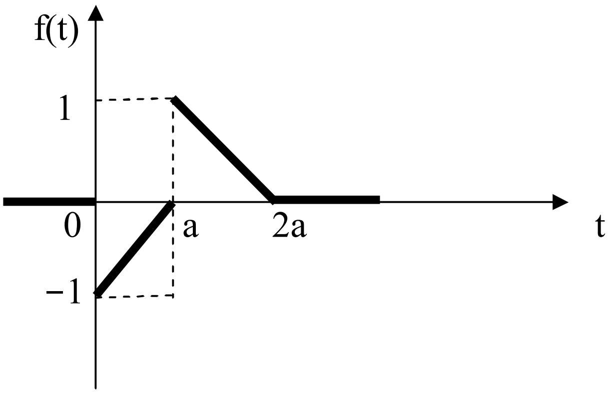
18.16



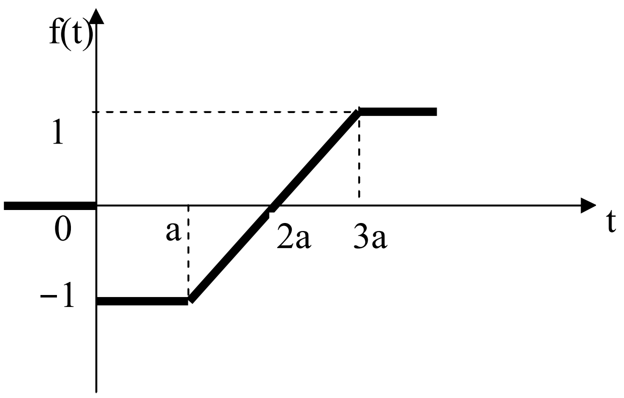
18.17



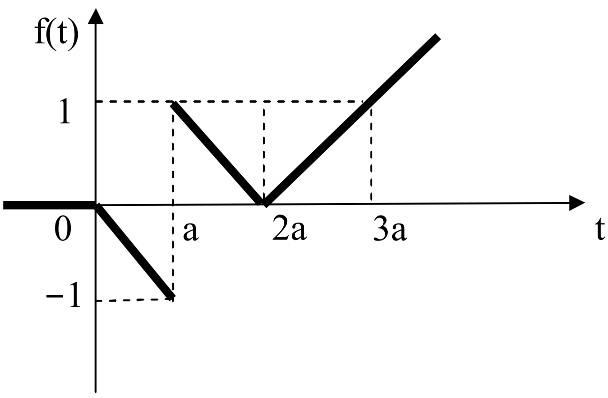
18.18



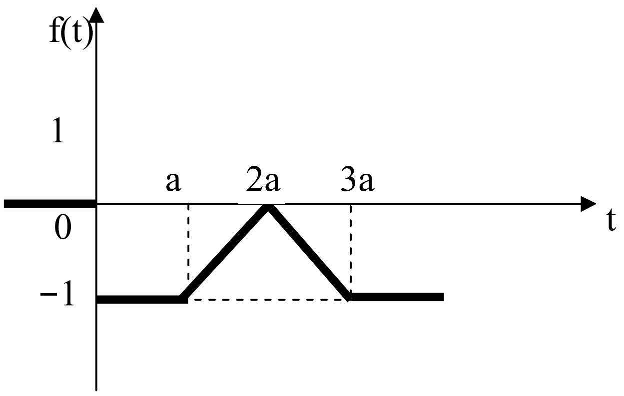
18.18



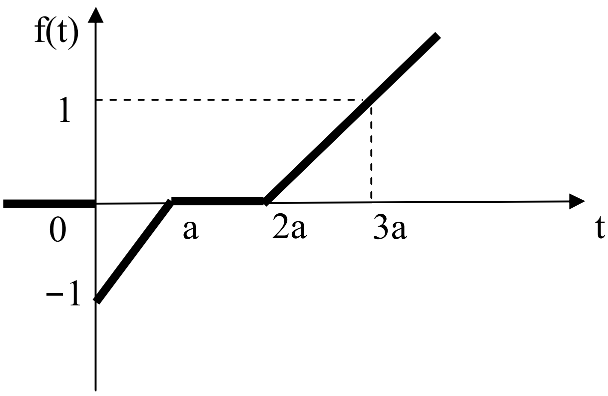
18.20



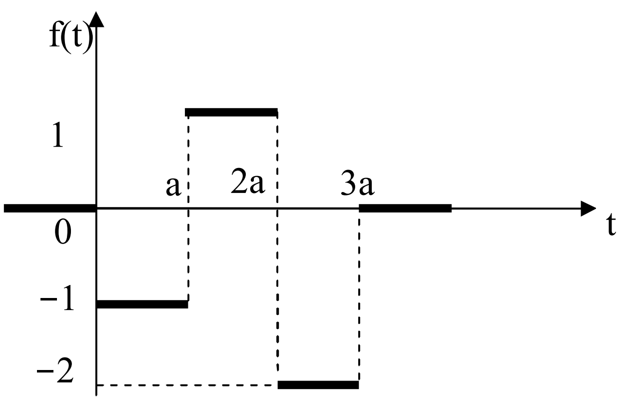
18.21



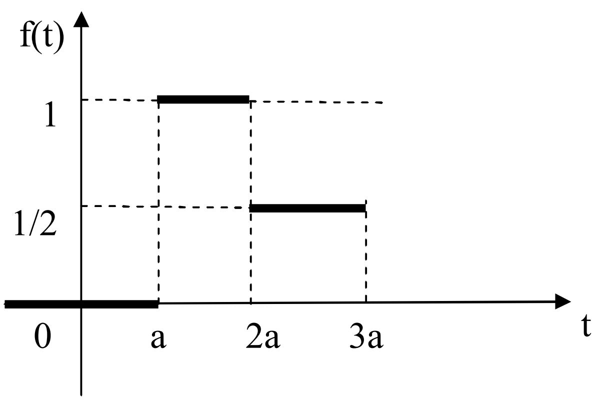
18.22



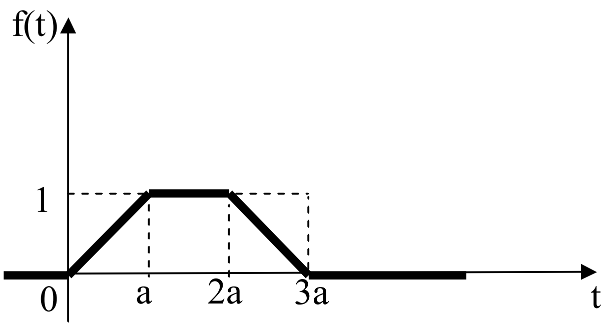
18.23



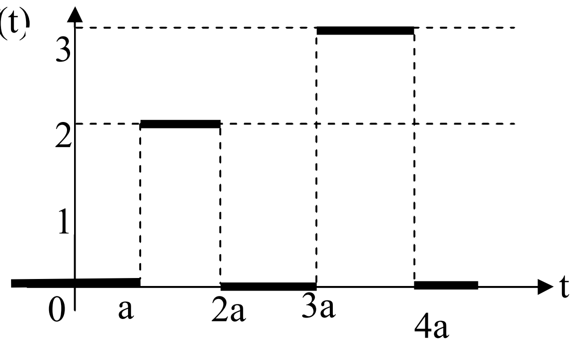
18.24



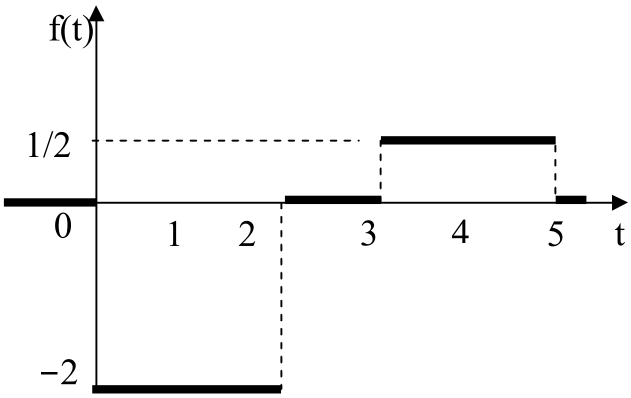
18.25



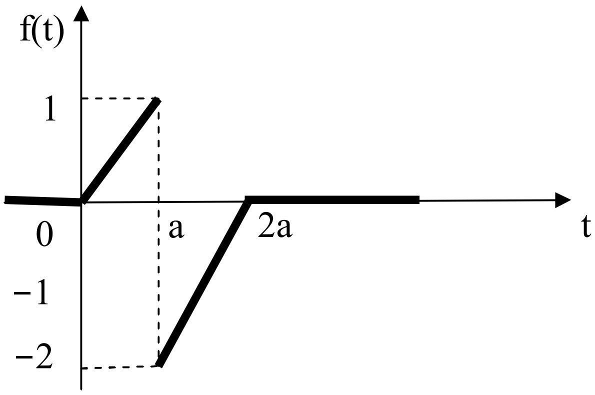
18.26



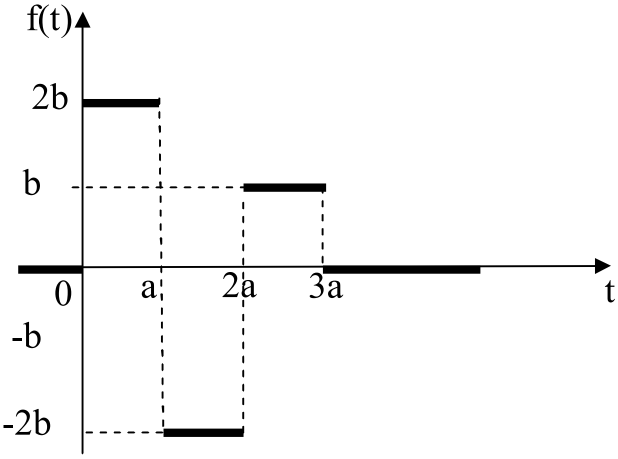
18.27



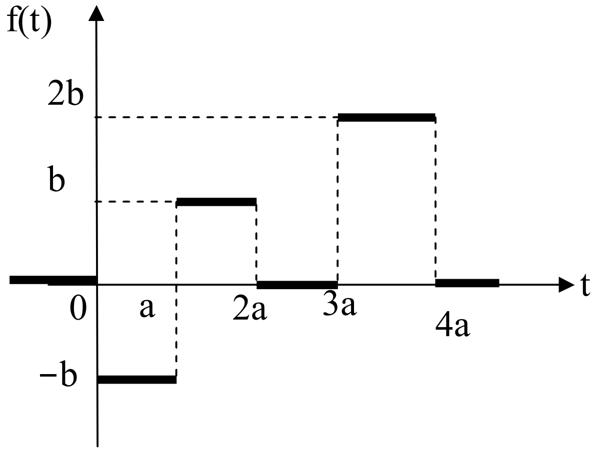
18.28



18.29



18.30



№19 Тапсырма

Берілген кескіндер үшін олардың түпнұсқаларын табыңыз:

Вариант	***Кескін***	***Вариант***	***Кескін***
1	$\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$	16	$\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$
2	$\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$	17	$\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$
3	$\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$	18	$\dfrac{1}{p(p^3+1)}$
4	$\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$	19	$\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$
5	$\dfrac{1}{p^3-1}$	20	$\dfrac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$
6	$\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$	21	$\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$
7	$\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$	22	$\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$
8	$\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$	23	$\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$
9	$\dfrac{2+3p}{(p-1)(p^2-p+1)}$	24	$\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$
10	$\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$	25	$\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$
11	$\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$	26	$\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$
12	$\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$	27	$\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$
13	$\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$	28	$\dfrac{6}{p^3-8)}$
14	$\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$	29	$\dfrac{4}{p^3+8}$
15	$\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$	30	$\dfrac{1}{p5+p^3}$

№20 Тапсырма

Дифференциалдық теңдеулердің $y(0)=0,\ y'(0)=0$ шартын қанағаттандыратын шешімдерін табыңыз.

Вариант	***Теңдеу***	***Вариант***	***Теңдеу***
1	$y''+y'=\dfrac{1}{(1+e^t)^2}$	15	$y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}$
2	$y''-4y=th^2 2t$	16	$y''-y=tht$
3	$y''-y=\dfrac{1}{ch^3t}$	17	$y''+2y'+y=\dfrac{te^{-t}}{t+1}$
4	$y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$	18	$y''-y=\dfrac{sht}{ch^2t}$
5	$y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$	19	$y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{ch^2t}$
6	$y''+2y'=\dfrac{1}{ch^2t}$	20	$y''+y'=\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$
7	$y''-y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$	21	$y''-y'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$
8	$y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{3+e^t}$	22	$2y''-y'=\dfrac{e^t}{\left(1+e^{\frac{t}{2}}\right)^2}$
9	$y''-4y=\dfrac{1}{ch^3 2t}$	23	$y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t+1}$
10	$y''-y'=\dfrac{1}{1+e^t}$	24	$y''-2y'=\dfrac{e^t}{cht}$
11	$y''-2y'+2y=2e^t cost$	25	$y''-y=th^2t$
12	$y''-y=\dfrac{1}{cht}$	26	$y''+y'=\dfrac{1}{1+e^t}$
13	$y''-y=\dfrac{1}{1+cht}$	27	$y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$
14	$y''-4y'+4y=\dfrac{2e^{2t}}{ch^2 2t}$	28	$y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{ch^2t}$

29	$y'' - y = \dfrac{1}{ch^2 t}$;	30	$y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$;

№21 Тапсырма

Операциалық әдіспен Коши есебінің шешімін табыңыз.

Вариант	***Коши есебі***	***Вариант***	***Коши есебі***
1	$y'' + 2y' = \sin t/2,$ $y(0) = -2, \quad y'(0) = 4.$	15	$y'' + y' = sht,$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$
2	$y'' + 4y' + 29y = e^{-2t},$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$	16	$y'' - 3y' + 2y = e^t,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
3	$2y'' + 3y' + y = 3e^t,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$	17	$y'' - 2y' - 3y = 2t,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
4	$y'' + 4y' = \sin 2t,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$	18	$2y'' + 5y' = 29\cos t$, $y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$
5	$y'' + y' + y = t^2 + t,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$	19	$y'' + 4y' = 8\sin 2t,$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$
6	$y'' - y' - 6y = 2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$	20	$y'' + 4y' = 4e^{2t} + 4t^2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$
7	$y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t},$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$	21	$y'' - 3y'' + 2y = 12e^{3t},$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$
8	$y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t,$ $y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$	22	$y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} 3\cos 3t,$ $y(0) = 5, \quad y'(0) = 1.$
9	$y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t,$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$	23	$y'' + y' - 2y = e^{-t},$ $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$
10	$y'' - 2y' = e^{-t}(t^2 + t - 3),$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$	24	$y'' + y = 2\cos t,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
11	$y'' - y' = 4\sin t + 5\cos 2t,$ $y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$	25	$y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos t/2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
12	$y'' + y = 6e^{-t},$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$	26	$y'' - y' = t^2,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
13	$y'' + y' = t^2 + 2t,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$	27	$y'' + y' - 2y = -2(t+1),$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
14	$y'' - y = \cos 3t$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$	28	$y'' - 9y = \sin 3t - \cos t,$ $y(0) = -3, \quad y'(0) = 2.$

29	$y'' + y' + y = 7et^{2t}$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$	30	$y'' + 2y' = 2 + e^t$, $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

№22 Тапсырма

Операциялық есептеу әдісімен дифференциалдық теңдеулер жүйесінің берілген шарттарды қанағаттандыратын шешімін табыңыз

Вариант	***Жүйе***	***Вариант***	***Жүйе***
1	$\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$	9	$\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$
2	$\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$	10	$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
3	$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$	11	$\begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
4	$\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$	12	$\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$
5	$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$	13	$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$
6	$\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$	14	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$
7	$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$	15	$\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x; \end{cases}$ $x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$
8	$\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\frac{3}{2}x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$	16	$\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

17	$\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = \dfrac{5}{2}x - y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$	24	$\begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$
18	$\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$	25	$\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
19	$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$	26	$\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
20	$\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$	27	$\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$
21	$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$	28	$\begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$
22	$\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$	29	$\begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
23	$\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$	30	$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

8 ЖЕКЕ ОРЫНДАУ ЖҰМЫСТАРЫН ОРЫНДАУ ҮЛГІСІ

№1. $z = -4 + 3i$ комплекс санының модулін, аргументін және аргументінің бас мәнін көрсетіп, тригонометриялық және көрсеткіштік түрлерінде жазыңыз.
Шешімі: $z = -4 + 3i$ саны үшін $x = -4$, $y = 3$. Санның модулі

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$-4 + 3i$ саны (10) формуласының $x < 0, y \geq 0$ жағдайына сәйкес келеді, сол себепті

$$\varphi = \arg z = \arg\frac{y}{x} + \pi = \arg\frac{3}{-4} + \pi = \pi - arctg\frac{3}{4}.$$

Олай болса

$$-4 + 3i = 5\left[\cos\left(\pi - \text{arctg}\,\frac{3}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \text{arctg}\,\frac{3}{4}\right)\right] = 5e^{i\left(\pi - \text{arctg}\,\frac{3}{4}\right)}.$$

№2. $z = \left(\sqrt{3} + i\right)^{12}$ дәрежесін есептеңіз.
Шешімі: z^{12} дәрежесін табайық, ол үшін алдымен z–тің модулі мен аргументін тауып, тригонометриялық пішінін жазу керек.

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\varphi=\arg z=\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},$$

онда

$$z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}).$$

Муавр формуласы бойынша

$$z^{12}=2^{12}(\cos 12\frac{\pi}{6}+i\sin 12\frac{\pi}{6})=2^{12}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=2^{12}.$$

№3. $\sqrt[3]{-i}$ түбірінің мәндерін тауып, олардың комплекс жазықтықтағы орнын көрсетіңіз.
Шешімі: $\sqrt[3]{z}$ түбірінің $z = -i$ нүктесіндегі мәнін табайық. $z = -i$ саны үшін $|z| = 1$ және $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ болғандықтан,

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-i} = \cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}.$$

k=0, 1, 2 тең деп алып, түбірдің барлық 3 мәнін табамыз:

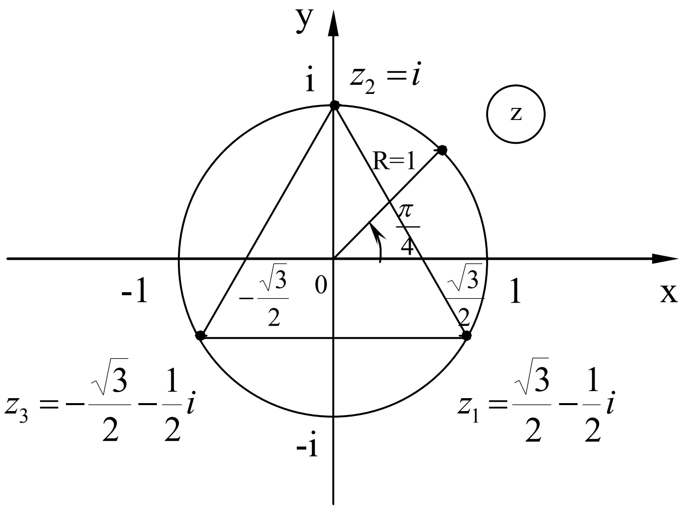
$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i;$$

$$z_3=\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=$$

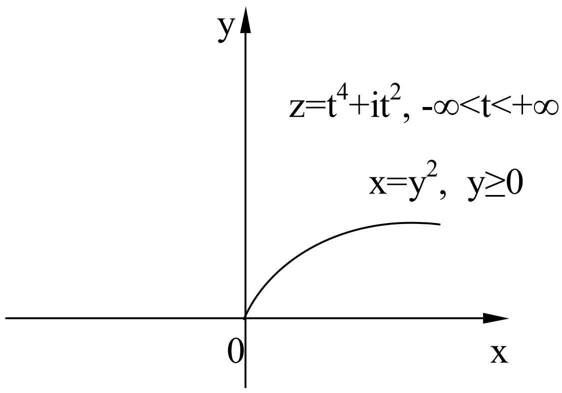
$$=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}.$$

Осы комплекс сандарды бейнелейтін нүктелер радиусы 1-ге, центрі z=0 жатқан шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың төбелері болып табылады.



№4. $z=t^4+it^2,\ -\infty<t<+\infty$ теңдеуімен қандай сызық берілгенін анықтап, кескінін жазықтықта өрнектеңіз.

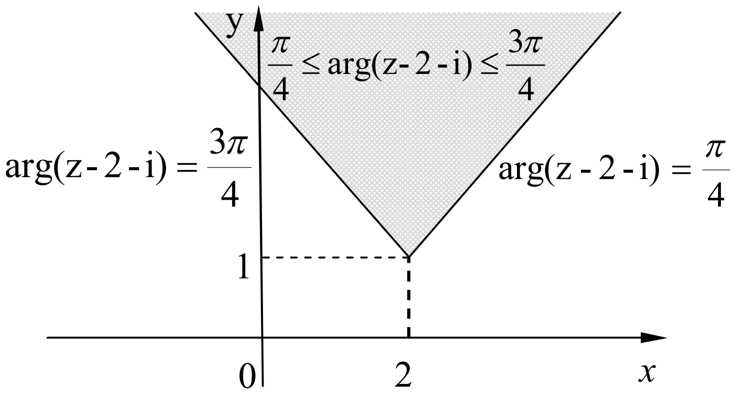
Шешімі: z=x+iy десек, онда $x=t^4$, $y=t^2$ теңдіктерін аламыз. Бұдан $x=y^2$ түріндегі параболаның, $y=t^2\geq 0$ болғандықтан, жоғарғы жарты жазықтығындағы тармағын аламыз.



№5. Комплекс жазықтықта $\frac{\pi}{4}\leq \arg(z-2-i)\leq\frac{3\pi}{4}$ теңсіздігімен берілген жиынды көрсетіңіз.

Шешімі: $\frac{\pi}{4}\leq \arg(z-2-i)\leq\frac{3\pi}{4}$ жиыны $\arg(z-2-i)=\frac{\pi}{4}$ және $\arg(z-2-i)=\frac{3\pi}{4}$ сәулелерімен шектелген. Осы сәулелерге тоқталайық. $z_0=2+i$ нүктесінен z

нүктесіне жүргізілген вектор мен нақты өстің оң бағытының арасындағы бұрышы $\arg(z - z_0) = \arg(z - (2+i)) = \arg(z - 2 - i)$. Сол себепті $\arg(z - 2 - i) = \frac{\pi}{4}$ сәулесі $z_0 = 2 + i$ нүктесінен 0x өсінің оң бағытымен $\frac{\pi}{4}$ бұрышын жасай шығатын сәуле болады. Сол сияқты $\arg(z - 2 - i) = \frac{3\pi}{4}$ сәулесі $z_0 = 2 + i$ нүктесінен 0x өсінің оң бағытымен $\frac{3\pi}{4}$ бұрышын жасай шығатын сәуле болады.



№ 6. $ch(2-3i)$, $\sin i$ сандарын алгебралық түрде жазыңыз.
Шешімі:

$$ch(2-3i) = \frac{e^{2-3i} + e^{-2+3i}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^2(\cos 3 - i\sin 3) + e^{-2}(\cos 3 + i\sin 3)\right) = \cos 3\, ch2 - i\sin 3\, sh2,$$

$$\sin i = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = i\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = ish1.$$

№ 7. $f(z) = e^{2z}$ фунциясы аналитикалық болатынын дәлелдеңіз, $f'(z)$ туындысын табыңыз.
Шешімі: $e^{2z} = e^{2x}(cos 2y + i\sin 2y)$, яғни

$$u(x,y) = e^{2x}\cos 2y, \quad v(x,y) = e^{2x}\sin 2y.$$

Сондықтан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y.$$

Бұдан Коши-Риман шарты бүкіл жазықтықта орындалатынын және дербес туындылардың үзіліссіз екенін көреміз. Олай болса $f(z)$ функциясы бүкіл жазықтықта дифференциалданады, яғни аналитикалық болады.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y + i2e^{2x}\sin 2y = 2e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) = 2e^{2z}.$$

Ескерту: Туындыны туындылар кестесін пайдаланып та табуға болды:

$$\left(e^{2z}\right)' = e^{2z}(2z)' = 2e^{2z}.$$

№8. $V(x,y)=e^{-5x}\sin 5y$ функциясы жорамал бөлігі болатын және f(0)=i шартын қанағаттандыратын $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ аналитикалық функциясын табыңыз.

Шешімі: $V(x,y)$ функциясының дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-5e^{-5x}\sin 5y, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=25e^{-5x}\sin 5y,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=5e^{-5x}\cos 5y. \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-25e^{-5x}\sin 5y.$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ болатынын көреміз, олай болса $V(x,y)$ гармониялық функция. Онда ол қандайда бір аналитикалық f(z) функциясының жорамал бөлігі бола алады. $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ - сол функция болсын. Бізге $U(x,y)$ функциясын табу керек. f(z) аналитикалық болғандықтан $U(x,y)$ және $V(x,y)$ функциялары Коши-Риман шарттарын қанағаттандырады:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial y}=5e^{-5x}\cos 5y, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=-\dfrac{\partial V}{\partial x}=-5e^{-5x}\sin 5y. \end{cases}$$

Жүйенің бірінші теңдігін пайдалана отырып $U(x,y)$ функциясын табамыз:

$$U(x,y)=\int\frac{\partial U}{\partial x}dx+\varphi(y)=\int 5e^{-5x}\cos 5y dx+\varphi(y)=e^{-5x}\cos 5y+\varphi(y),$$

мұндағы φ(y) – y айнымалысының кез келген дифференциалданатын функциясы. Осы $U(x,y)$ функциясының y айнымалысы бойынша дербес туындысын табамыз:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-5e^{-5x}\sin 5y+\varphi'(y)$$

Бұл теңдіктен, жүйенің екінші теңдігін ескерсек $\varphi'(y)=0$, яғни $\varphi(y)=C=const$ болатыны шығады. Олай болса

$$U(x,y)=e^{-5x}\cos 5y+C.$$

Онда

$$f(z)=U(x,y)+iV(x,y)=e^{-5x}\cos 5y+C+ie^{-5x}\sin 5y.$$

C тұрақтысын f(z) функциясы f(0)=i шартын қанағаттандыратындай етіп таңдап аламыз:

$$f(0)=i \Leftrightarrow \left(e^{-5x}\cos 5y+C+ie^{-5x}\sin 5y\right)\Big|_{z=0}=i \Leftrightarrow 1+C=i \Leftrightarrow C=-1+i.$$

Сонымен, іздеп отырған аналитикалық функция

$$f(z)=e^{-5x}\cos 5y+ie^{-5x}\sin 5y-1+i$$

функциясы болады.

№9. $\int\limits_{OAB} f(z)dz$ интегралын OAB сынық сызығы бойынша есептеңіз, мұндағы $f(z)=3z^2-1$, 0(0, 0), A(1, 2) және B(2, -1).

Шешімі: $\mathrm{f(z)} = 3z^2 - 1$ бүкіл ⓩ комплекс жазықтығында аналитикалық, олай болса интегралдың 7-қасиеті бойынша берілген интегралды (39) формуласын пайдаланып табуға болады. Бұл арада $z_1 = O(0,0) = 0$, $z_2 = B(2,-1) = 2 - i$,

$$\int\limits_{OAB} \left(3z^2 - 1\right)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} \left(3z^2 - 1\right)dz = \left(z^3 - z\right)\Big|_0^{2-i} = (2-i)^3 - (2-i) = -10i.$$

№10. $\int\limits_{\Gamma} z\bar{z}dz$ нтегралын есептеңіз, мұндағы $\Gamma: |z| = 1$, $0 \le \arg z \le 2\pi$ жарты шеңбері.

Шешімі: Берілген шеңбердің параметрлік теңдеуі $z=e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ түрінде жазылады. Олай болса интегралдың 6-қасиеті бойынша

$$\int\limits_{\Gamma} z\bar{z}dz = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi}\left(e^{i\varphi}\right)' d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}d\varphi = e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} = e^{i2\pi} - e^0 = 1 - 1 = 0.$$

№11. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz$ тұйық контурлы интегралын Кошидің интегралдық теоремасын немесе формуласын қолданып есептеңіз, мұндағы Г төмендегі шеңберлердің бірі: а) $|z-4| = 2$; б) $|z+5i| = 4$; в) $|z| = 3$.

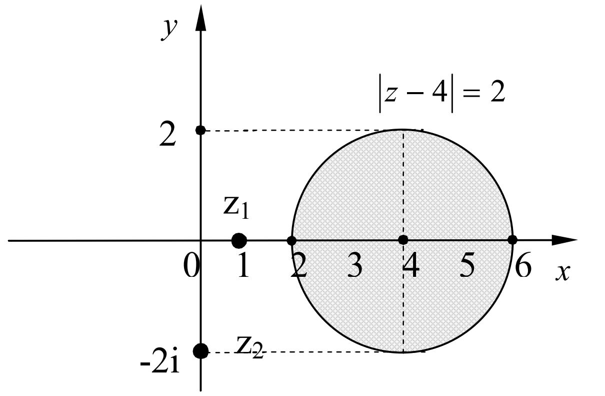
Шешімі: $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ тұйық контурлы интегралын Г контурымен шектелген тұйық облыста $f(z)$ функциясының айрықша нүктесі болмаған жағдайда Коши теоремасы бойынша, ал болған жағдайда Кошидің интегралдық формуласын қолданып табуға болады.

Сондықтан бізге, біріншіден, $f(z) = \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}$ функциясының айрықша нүктелерін анықтап алу қажет. Бұл функцияның айрықша нүктелері бөлшектің бөлімі нөлге айналатын $z_1 = 1$ және $z_2 = -2i$ нүктелері болады. Енді а), б), в) жағдайларына жеке-жеке тоқталайық.

а) $\int\limits_{|z-4|=2} \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz$ интегралын есептейік. $z_1 = 1$ және $z_2 = -2i$ айрықша нүктелерінің $|z-4| = 2$ шеңбері шектейтін $|z-4| \le 2$ тұйық дөңгелегіне тиістілігін тексереміз:

$$|z_1 - 4| = |1-4| = |-3| = 3 > 2;$$

$$|z_2 - 4| = |-2i - 4| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5} > 2.$$

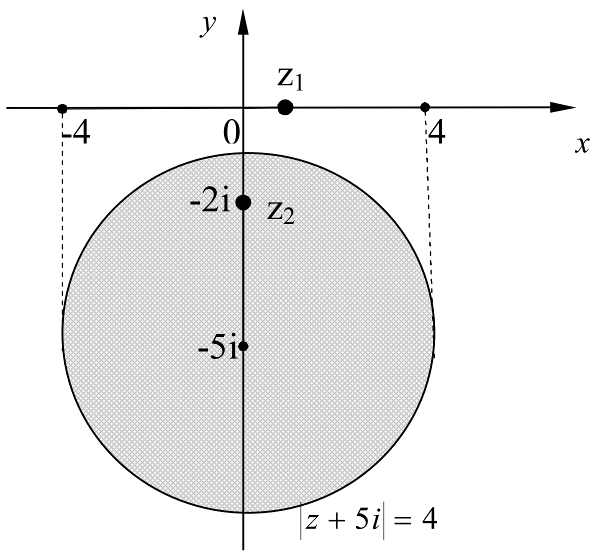


Олай болса $z_1=1$ және $z_2=-2i$ айрықша нүктелері $|z-4|\le 2$ дөңгелегіне тиіссіз, яғни $f(z)=\dfrac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}$ функциясы $|z-4|\le 2$ дөңгелегінде аналитикалық. Онда Кошидің интегралдық теоремасы бойынша

$$\int\limits_{|z-4|=2}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz=0.$$

б) $\displaystyle\int\limits_{|z+5i|=4}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz$ интегралын есептейік.

$$|z_1+5i|=|1+5i|=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}>4;$$
$$|z_2+5i|=|-2i+5i|=|3i|=3<4.$$



Сонымен $|z+5i|\le 4$ дөңгелегіне тек $z_2=-2i$ айрықша нүктесі тиісті болатыны шықты. Олай болса $f(z)$ функциясы $|z+5i|\le 4$ тұйық облысының $z_2=-2i$ нүктелерінен басқа нүктелерінде аналитикалық. Интеграл астындағы функцияны Кошидің интегралдық формуласына қолдануға сәйкес түрде жазып аламыз:

$$\int\limits_{|z+5i|=4}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz=\int\limits_{|z+5i|=4}\frac{\frac{z+4}{(z-1)^2}}{z-(-2i)}dz.$$

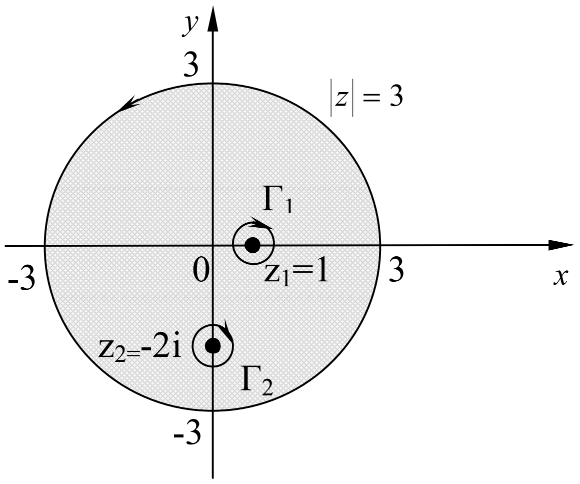
$w=\dfrac{z+4}{(z-1)^2}$ функциясы $|z+5i|\le 4$ тұйық облысында аналитикалық болғандықтан соңғы интегралға Кошидің интегралдық формуласын қолдануға болады:

$$\int\limits_{|z+5i|=4}\frac{\frac{z+4}{(z-1)^2}}{z-(-2i)}dz=2\pi i\left.\frac{z+4}{(z-1)^2}\right|_{z=-2i}=\frac{2i+4}{(2i-1)^2}=\frac{2i+4}{-4-4i+1}=\frac{2i+4}{-4i-3}=\frac{8+6i-16i+12}{25}=\frac{20-10i}{25}=\frac{4}{5}-i\frac{2}{5}.$$

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz$ интегралын есептейік. $z_1=1$ және $z_2=-2i$ айрықша нүктелерінің $|z|\le 3$ тұйық облысына тиістілігін тексереміз:

$|z_1| = |1| = 1 < 3;$

$|z_2| = |-2i| = 2 < 3.$



Сонымен $z_1 = 1$ және $z_2 = -2i$ айрықша нүктелерінің екеуі де $|z| \le 3$ тұйық облысына тиісті болып шықты. Мұндай, яғни облысқа тиісті айрықша нүктелер саны бірнеше болған жағдайда берілген интегралды Кошидің көп байланысты облыс үшін берілген теоремасы мен интегралдық формуласын қолданып табуға болады. Γ_1, Γ_2 центрлері сәйкесінше $z_1 = 1$, $z_2 = -2i$ нүктелерінде орналасқан, бір-бірімен қилыспайтын және $|z| < 3$ облысында жатқан шеңберлер болсын. Онда Кошидің көп байланысты облыс үшін берілген теоремасы бойынша

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz$$

теңдігі орынды болады. Оң жағындағы интегралдарды оларға Кошидің интегралдық формуласын қолдануға қолайлы түрде жазып аламыз:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\frac{z+4}{z+2i}}{(z-1)^2}dz + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\frac{z+4}{(z-1)^2}}{z-(-2i)}dz.$$

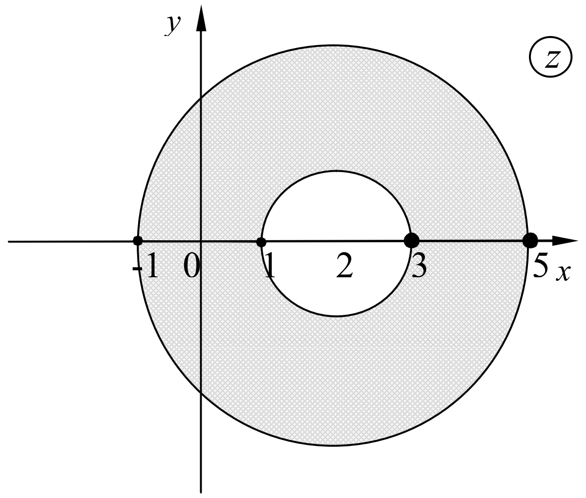
Оң жақтағы интегралдарға Кошидің интегралдық формуласын қолданамыз:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{z+4}{z+2i}\right)'\Bigg|_{z=1} + 2\pi i\left(\frac{z+4}{(z-1)^2}\right)\Bigg|_{z=-2i} = 2\pi i\frac{z+2i-z-4}{(z+2i)^2} + 2\pi i\frac{-2i+4}{(-2i-1)^2} =$$

$$= 2\pi i\frac{2i-4}{1+4i-4} + 2\pi i\frac{4-2i}{-3+4i} = 0.$$

№12. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 15}$ функциясын 1<│z-2│<3 сақинасында Лоран қатарына жіктеңіз.

Шешімі: $f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 15}$ функциясының айрықша нүктелері $z^2 - 8z + 15$ үшмүшелігінің түбірлері болатын z_1=3, z_2=5 нүктелері болады.



$z_1=3$, $z_2=5$ айрықша нүктелері $1<|z-2|<3$ сақинасына тиіссіз, онда берілген функция бұл сақинада аналитикалық, олай болса ол осы сақинада $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-2)^n$ түріндегі Лоран қатарына жіктеледі. Осы жіктелуді табу үшін функцияны

$$f(z)=\frac{1}{z^2-8z+15}=\frac{1}{(z-3)(z-5)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-3}\right)$$

түрінде жазып аламыз.

Енді $\frac{1}{z-5}$ және $\frac{1}{z-3}$ бөлшектерінің әрқайсысын z-2 қосындысының дәрежелеріне $\frac{1}{1-t}$ бөлшегінің $|t|<1$ облысында орынды болатын

$$\frac{1}{1-t}=1+\mathrm{t}+\mathrm{t}^2+\ldots+\mathrm{t}^{\mathrm{n}}+\ldots=\sum_{n=0}^{-\infty} t^n, \quad |t|<1$$

жіктелуін пайдаланып жіктейміз.

$\frac{1}{z-5}$ бөлшегін жіктеу үшін оны

$$\frac{1}{z-5}=\frac{1}{(z-2)-3}=\frac{-1}{3}\frac{1}{1-\frac{z-2}{3}}$$

түрінде жазып алып $\frac{1}{1-t}$ бөлшегінің жіктелуінде $t=\frac{z-2}{3}$ деп алсақ

$$\frac{1}{z-5}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z-2}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$

жіктеуін аламыз. Бұл жіктеу $|t|=\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$, яғни $|z-2|<3$ ашық дөңгелегінде орынды болады.

$\frac{1}{z-3}$ бөлшегін де дәл осылай

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{1-(z-2)}$$

түріне келтіріп алып $(z-2)$ дәрежелеріне жіктеуге болар еді, бірақ бұл жіктеу $|t|=|z-2|<1$ ашық дөңгелегінде ғана орынды болады. Ал біздің сақинада $|z-2|>1$, сол себепті оның (z-1)-дің теріс дәрежелеріне жіктеуін іздейміз:

$\frac{1}{z-3}$ бөлшегін

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-2)-1}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}}$$

түрінде жазып алып $\frac{1}{1-t}$ бөлшегінің жіктелуінде $t=\frac{1}{z-2}$ деп алсақ, $|t|=\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$, яғни бізге керекті $|z-2|>1$ облысында орынды болатын

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-2)^n$$

жіктелуін аламыз.

$\frac{1}{z-5}$ және $\frac{1}{z-3}$ бөлшектері үшін алынған жіктеулердің біріншісі $|z-2|<3$ облысында, ал екіншісі $|z-2|>1$ облысында орынды болғандықтан $1<|z+1|<3$ облысында екі жіктеу де орынды болады. Олай болса $f(z)$ функциясы үшін $2<|z+1|<3$ сақинасында

$$f(z)=\frac{1}{z^2-8z+15}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-3}\right)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-2)^n}{2\cdot 3^{n+1}}-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-2)^n}{2}$$

Лоран жіктеуі орынды.

Төмендегі сұраққа тоқтала кетейік:

$f(z)=\frac{1}{z^2-4z+3}$ функциясы $r<|z|<R$ түріндегі сақинасында Лоран қатарына жіктелінуі үшін сақина қандай шарттарды қанағаттандыруы керек?

$f(z)$ функциясы берілген сақинада Лоран қатарына жіктелінуі үшін бұл сақинада функцияның айрықша $z_1=1$, $z_2=3$ нүктелері болмауы керек, яғни сақина келесі шарттардың біреуін қанағаттандыруы керек:

$$0\le r<|z|<R<1;\quad 0\le r<|z|<R\le 3;\quad 3\le r<|z|<R\le+\infty.$$

№13. $f(z)=1+\cos 2z$ функциясының нөлдерін тауып, олардың ретін анықтаңыз.

Шешімі: $f(z)=0$ теңдеуінен функцияның нөлдері

$$1+\cos 2z=0\Leftrightarrow\cos 2z=-1\Leftrightarrow 2z=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

$$z_k=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

нүктелері болатынын табамыз. Енді, $f(z)$ функциясының туындыларының осы нөлдердегі мәндерін қарастырамыз:

$$f'\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin 2\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin(2k\pi+\pi)=-2\sin(2k+1)\pi=0,$$

$$f''\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-4\cos 2\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-4\cos(2k\pi+\pi)=-4\cos(2k+1)\pi=4\neq 0.$$

Олай болса, анықтама 22 бойынша, $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,...$ нүктелері берілген функцияның екінші ретті нөлдері болып табылады.

№14.

а) $f(z)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ функциясының айрықша нүктелерін табыңыз және оларды сипаттаңыз;

б) $z=\infty$ нүктесін сипаттаңыз.

Шешімі: f(z) функциясының айрықша нүктелері бөлшектің бөліміндегі $g(z)=e^{\frac{1}{z}}+1$ функциясының нөлдері мен $\frac{1}{z}$ бөлшегінің бөлімі нөлге айналатын $z=0$ нүктесі болады.

$g(z)$ функциясының нөлдерін табайық:

$$g(z)=0\Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}}+1=0\Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}}=-1\Leftrightarrow\frac{1}{z}=Ln(-1)\Leftrightarrow\frac{1}{z}=Ln(-1)+i\arg(-1)+i2m\pi,\quad m\in Z\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{z}=i\pi+i2m\pi,\quad m\in Z\Leftrightarrow z=\frac{1}{(2m+1)\pi i},\, m\in Z.$$

Сонымен $g(z)$ функциясының нөлдері

$$z_m=\frac{1}{(2m+1)\pi i},\quad m\in Z$$

нүктелері болатынын алдық. Енді осы нөлдердің ретін анықтайық. Ол үшін $g(z)$ функциясының туындысының осы нөлдердегі мәндерін қарастырамыз:

$$g'(z_m)=\frac{-1}{z_m^2}e^{\frac{1}{z_m}}=\frac{-1}{(2m+1)\pi i}e^{\frac{1}{(2m+1)\pi i}}\neq 0.$$

$g'(z_m)\neq 0$, онда, анықтама 22 бойынша, z_m нүктесі $g(z)$ функциясының бірінші ретті нөлі болады. Олай болса z_m нүктесі $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ функциясының бірінші ретті полюсі болып табылады. $z=0$ айрықша нүктесі, $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=0$ болғандықтан оқшауланған айрықша нүкте бола алмайды, себебі тізбектің шегінің анықтамасы бойынша $z=0$ нүктесінің кез келген аймағында z_m нүктесі табылады, яғни $z=0$ нүктесінің өзінен басқа айрықша нүкте болмайтын аймағы табылмайды.

№15. $f(z)=e^{\frac{3}{z-2}}$ функциясының $z=2$ айрықша нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

Шешімі: Берілген $f(z)$ функцияның $z=2$ айрықша нүктесіндегі шегермесі анықтама бойынша $f(z)=e^{\frac{3}{z-2}}$ функциясының Лоран қатарына $z-2$ дәрежесі бойынша жіктелуінің c_{-1} коэффициентіне тең. $f(z)$ функцияның Лоран қатарына жіктелуін жазамыз:

$$f(z)=e^{\frac{3}{z-2}}=1+\frac{3}{z-2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{3}{z-2}\right)^2+\ldots,\quad 0<|z-2|<\infty .$$

Бұдан

$$c_{-1}=3$$

екені шығады.

Олай болса ізделінді шегерме

$$\underset{z=2}{res}\left(e^{\frac{3}{z-2}}\right)=c_{-1}=3.$$

№16. $\int_{\Gamma} f(z)dz$ тұйық контурлы интегралын шегерме теориясын қолданып есептеңіз, мұндағы $f(z)=\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}$, ал Г контуры │z│=3 шеңбері.

Шешімі: $f(z)=\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}$ функциясының $z_1=1$ және $z_2=-2i$ екі айрықша нүктесі бар. Олардың екеуі де │z│=3 шеңберінің ішінде жатады (көз жеткізіңіз).

Шегерме туралы негізгі теорема бойынша

$$\int_{|z|=3}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz=2\pi i\left(\underset{z=1}{res}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}+\underset{z=-2i}{res}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}\right)$$

z=1 айрықша нүктесі $f(z)$ функциясының екінші ретті полюс. Олай болса біз (58) формуласын қолдана аламыз:

$$\underset{z=1}{res}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}(z-1)^2\right\}=\lim_{z\to 1}\frac{-4+2i}{(z+2i)^2}=\frac{-4+2i}{-3+4i},$$

ал z=-2i айрықша нүктесі жай полюс, сондықтан (59) формуласы бойынша

$$\underset{z=-2i}{res}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}=\lim_{z\to -2i}\left[\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}(z+2i)\right]=\lim_{z\to -2i}\frac{z+4}{(z-1)^2}=\frac{4-2i}{-3+4i}.$$

Шегермелердің алынған мәндерін жоғарғыдағы теңдікке қойсақ

$$\int_{|z|=3}\frac{z+4}{(z-1)^2(z+2i)}dz=2\pi i\left(\frac{-4+2i}{-3+4i}+\frac{4-2i}{-3+4i}\right)=0$$

теңдігіне келеміз.

№17. $f(t)=t^2 e^t$ түпнұсқасының кескінін табыңыз.

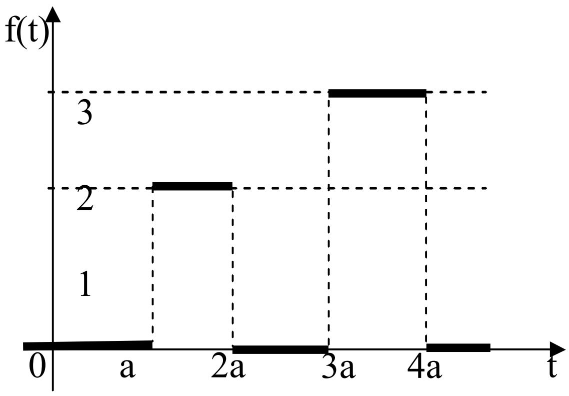
Шешімі: $e^t \div \dfrac{1}{p-1}$ екені белгілі. Кескіндерді дифференциалдау теоремасы бойынша

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' \div -t\,e^t, \quad \frac{1}{(p-1)^2} \div t\,e^t.$$

$$\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right]' \div -t\left(te^t\right) \text{ немесе } t^2e^t \div \frac{2!}{(p-1)^3}.$$

$$F(p)=\frac{2!}{(p-1)^3}.$$

№18. $\mathrm{f}(t)$ түпнұсқасының график бойынша кескінін табыңыз.



Шешімі: $\mathrm{f}(t)$ функциясын жалпыланған бірлік $1(t-\tau)$ функциясы арқылы өрнектеп аламыз:

$$\mathrm{f}(t)=2\cdot 1(t-a)-2\cdot 1(t-2a)+3\cdot 1(t-3a)-3\cdot 1(t-4a).$$

Бұдан, сызықтылық қасиеті мен $1(t-\tau)\div \dfrac{1}{p}e^{-p\tau}$ сәйкестігі бойынша (101-бетті қараңыз)

$$\mathrm{f}(t)=2\cdot 1(t-a)-2\cdot 1(t-2a)+3\cdot 1(t-3a)-3\cdot 1(t-4a)\div 2\frac{1}{p}e^{-ap}-2\frac{1}{p}e^{-2ap}+3\frac{1}{p}e^{-3ap}-3\frac{1}{p}e^{-4ap}$$

Сонымен $\mathrm{f}(t)$ түпнұсқасының кескіні

$$F(p)=\frac{2}{p}e^{-ap}-\frac{2}{p}e^{-2ap}+\frac{3}{p}e^{-3ap}-\frac{3}{p}e^{-4ap}$$

болып табылады.

№19. Берілген $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$ кескіні бойынша түпнұсқасын табыңыз.

Шешімі: Берілген функцияны белгісіз коэффициенттер тәсілі арқылы жай бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

$$\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2-6p+10}\Rightarrow 3p-2=A(p^2-6p+10)+(Bp+C)(p-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)p^2+(-6A-B+C)p+(10A-C)=3p-2\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-6A-B+C=3\Rightarrow\\10A-C=-2\end{cases}\begin{cases}A=0{,}2\\B=-0{,}2\\C=4\end{cases}.$$

Олай болса

$$F(p)=\frac{0{,}2}{p-1}+\frac{-0{,}2p+4}{p^2-6p+10}.$$

Екінші бөлшектің бөліміндегі өрнектен толық квадрат бөліп шығарамыз:

$$F(p)=\frac{0{,}2}{p-1}+\frac{-0{,}2p+4}{(p-3)^2+1}$$

немесе

$$F(p)=\frac{0{,}2}{p-1}+\frac{-0{,}2(p-3)-0{,}6+4}{(p-3)^2+1}=\frac{0{,}2}{p-1}-0{,}2\frac{p-3}{(p-3)^2+1}+\frac{3{,}6}{(p-3)^2+1}.$$

Сызықтылық қасиеті мен

$$e^{at}\div\frac{1}{p-a},\quad e^{at}\cos\omega t\div\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2},\quad e^{at}\sin\omega t\div\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$$

сәйкестіктері бойынша

$$F(p)\div 0{,}2e^t-0{,}2e^{3t}\cos t+3{,}6e^{3t}\sin t$$

сәйкестігін аламыз. Сонымен

$$\mathrm{f}(t)=0{,}2e^t-0{,}2e^{3t}\cos t+3{,}6e^{3t}\sin t.$$

№20. $y''-2y'-3y=e^{3t}$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0)=0,\ y'(0)=0$ шарттарын қанағаттандыратын шешімдерін табыңыз.

Шешімі: $y(t)\div Y(p)=Y$ болсын. Дифференциалдық теңдеуде түпнұсқалардан кескіндерге көшсек

$$p^2Y-p\cdot y(0)-y'(0)-2(pY-y(0))-3Y=\frac{1}{p-3}\Leftrightarrow p^2Y-2pY-3Y=\frac{1}{p-3}$$

операторлық теңдеуін аламыз. Теңдеуден Y кескінін табамыз:

$$Y=\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}$$

Енді Y кескінінен $y(t)$ түпнұсқасына көшу керек. Түпнұсқаға $\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}$ бөлшегін қарапайым бөлшектерге жіктеу арқылы көшуге болады:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}=\frac{A}{(p-3)^2}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+1},$$

бұдан

$$1=A(p+1)+B(p-3)(p+1)+C(p-3)^2.$$

теңдігі шығады.

Соңғы теңдікте $p=-1$ деп алсақ $C=\frac{1}{16}$,

$p=3$ деп алсақ $A=\dfrac{1}{4}$ екендігі шығады.

A мен C мәндерін қойып алып, $p=0$ деп алсақ, $B=\dfrac{1}{16}$ болатынын көреміз. A, B, C тұрақтыларының мәндерін қоямыз:

$$Y=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{1}{16(p+1)}.$$

Енді Y түпнұсқасын табамыз:

$$y=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}.$$

№21. $y''-3y'+2y=2e^t\cos\dfrac{t}{2}$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0)=1,\ \ y'(0)=0$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін операциялық әдіспен табыңыз.

Шешімі: $y(t)\div Y(p)=Y$ болсын. Онда (80), (81) және

$$e^{at}\cos\omega t\div\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$$

формулалары бойынша

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(0)-1,$$

$$y''(t)\div p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p,$$

$$2e^t\cos\frac{t}{2}\div2\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}.$$

Дифференциалдық теңдеуде түпнұсқалардан кескіндерге көшсек

$$p^2Y(p)-p-3PY(p)+3+2Y(p)=2\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}$$

операторлық теңдеуін аламыз. Теңдеуден $Y(p)$ кескінін табамыз:

$$Y(p)(p^2-3p+2)=2\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+p-3,$$

$$Y(p)=2\frac{p-1}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)(p-1)(p-2)}+\frac{p-3}{(p-1)(p-2)},$$

$$Y(p)=\frac{2}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)(p-2)}+\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}.$$

Енді $Y(p)$ кескінінен $y(t)$ түпнұсқасына көшу керек. Түпнұсқаға $\dfrac{2}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)(p-2)}+\dfrac{p-3}{(p-1)(p-2)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектерге жіктеу арқылы көшуге болады:

$$\frac{2}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)(p-2)}=\frac{Ap+B}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{C}{p-2},$$

$$2=(Ap+B)(p-2)+C\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right),$$

$p=2$ болса $2=\frac{5}{4}C \Rightarrow C=1{,}6.$

$$2=Ap^2-2Ap+Bp-2B+1{,}6p^2-362p+2$$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 2=-2B+2 \qquad \Rightarrow B=0 \\ p^1 & 0=-2A+B-3{,}2 \Rightarrow A=-1{,}6. \end{array}$$

Сонымен, $\frac{2}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)(p-2)}=\frac{-1{,}6p}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{1{,}6}{p-2}.$

$$\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}=\frac{D}{p-1}+\frac{E}{p-2},$$

$$p-3=D(p-2)+E(p-1),$$

$p=2$ болса $E=-1.$

$p=1$ болса $-D=-2 \Rightarrow D=2.$

Демек, $\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}=\frac{2}{p-1}-\frac{1}{p-2}.$

Бұдан

$$Y(p)=\frac{-1{,}6}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{1{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}-\frac{1}{p-2}=\frac{-1{,}6p+1{,}6}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{1{,}6}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{0{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}=$$

$$=-1{,}6\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}-3{,}2\frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{0{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}.$$

Енді,

$$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}\div e^{at}\cos\omega t, \quad \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}\div e^{at}\sin\omega t, \quad \frac{1}{p-1}\div e^{at}$$

қатыстарын және сызықтық қасиетті пайдаланып $Y(p)$ түпнұсқасын табамыз:

$$y(t)=-1{,}6e^t\cos\frac{1}{2}t-3{,}2e^t\sin\frac{1}{2}t+0{,}6e^{2t}+2e^t.$$

№22. $\begin{cases} x'+y=e^t \\ x+y'=e^{-t} \end{cases}$

дифференциалдық теңдеулер жүйесінің $x(0)=1,\ y(0)=2$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табыңыз.

Шешімі:

$$x=x(t)\div X(p)=X; \quad y=y(t)\div Y(p)=Y$$

болсын. Онда, берілген шарттар негізінде,

$$x'\div pX-1; \quad y'\div pY-2$$

болатынын аламыз.

Берілген жүйеде бейнелерге көшу арқылы

$$\begin{cases} pX - 1 + Y = \dfrac{1}{p-1} \\ pY - 2 + X = \dfrac{1}{p+1} \end{cases}$$

операторлық теңдеулер жүйесін аламыз. Осы алгебралық теңдеулер жүйесін шеше отырып

$$\begin{cases} x(t) = cht - 2sht + tcht, \\ y(t) = 2cht - tsht. \end{cases}$$

шешіміне келеміз.

9 ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫ

1. Комплекс саны аргументінің өзгеру аралығын көрсетіңіз.

A) $(-\pi;\pi]$
B) $[-\pi;\pi]$
C) $[0;2\pi]$
D) $(0;2\pi]$
E) $(-\frac{\pi}{2};\pi]$

2. $\sqrt[n]{z}$ мәндерін есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)$, k=0,1,2,....,n

B) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)$, k=0,1,2,....,n-1

C) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\right)$

D) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k}{n}\right)\right)$, k=0,1,2,....,n-1

E) $\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)$, k=0,1,2,....,n-1

3. Екі комплекс санның көбейтіндісінің формуласын көрсетіңіз.

A) $z_1\cdot z_2=|z_1|+|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
B) $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1\cdot\varphi_2)+i\sin(\varphi_1\cdot\varphi_2))$
C) $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
D) $z_1\cdot z_2=|z_1\cdot z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)-i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
E) $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)-i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

4. Екі комплекс санның бөліндісінің формуласын көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|(\cos(\varphi_1-\varphi_2)-i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

B) $\frac{z_1}{z_2}=|z_1-z_2|(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

C) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)$

D) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$

E) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$

5. Екі комплекс санның көбейтіндісінің аргументі неге тең?

A) $\dfrac{\mathrm{Arg} z_2}{\mathrm{Arg} z_1}$
B) $\mathrm{Arg}\ z_1 \cdot \mathrm{Arg}\ z_2$
C) $\mathrm{Arg}\ z_1 - \mathrm{Arg}\ z_2$
D) $\mathrm{Arg}\ (z_1 + z_2)$
E) $\mathrm{Arg}\ z_1 + \mathrm{Arg}\ z_2$

6. Екі комплекс санның қатынасының аргументі неге тең?

A) $\mathrm{Arg}\ z_1 - \mathrm{Arg}\ z_2$
B) $\mathrm{Arg}\ z_1 : \mathrm{Arg}\ z_2$
C) $\mathrm{Arg}\ z_1 + \mathrm{Arg}\ z_2$
D) $\mathrm{Arg}(z_1 - z_2)$
E) $\mathrm{Arg} z_1 \cdot \mathrm{Arg} z_2$

7. $e^{i\varphi}$ өрнегі үшін Эйлер формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\varphi + \sin\varphi$
B) $\cos\varphi - i\sin\varphi$
C) $\cos\varphi + i\sin\varphi$
D) $\cos\varphi - \sin\varphi$
E) $i\sin\varphi$

8. $e^{-i\varphi}$ өрнегі үшін Эйлер формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\varphi - \sin\varphi$
B) $\cos\varphi + i\sin\varphi$
C) $\cos\varphi + \sin\varphi$
D) $\cos\varphi - i\sin\varphi$
E) $i\sin\varphi$

9. ln z мәндерін есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$
B) $\ln z + i(\arg z + 2\pi k)$

C) ln|z| + arg z+2πk
D) ln|z| + iarg z+2πk
E) ln|z| + iarg z

10. $\bar{z}$ комплекс санының аргументін көрсетіңіз.

A) –Arg z
B) Arg (-z)
C) –Arg z+π
D) –Arg z –π
E) Arg z+πk

11. e^z функциясының дәрежелік қатарға жіктелу формуласын көрсетіңіз.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}$

E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$

12. sin z функциясының дәрежелік қатарға жіктелу формуласын көрсетіңіз.

A) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{2n!}$

B) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+2}}{(2n+1)!}$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+2}}{(2n+1)!}$

E) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n-1)!}$

13. cos z функциясының дәрежелік қатарға жіктелу формуласын көрсетіңіз.

A) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

B) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{(2n-1)!}$

C) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+2}}{(2n+1)!}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$

E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}$

14. $w=z^a$ дәрежелік функцияның анықтамасын көрсетіңіз.

A) $e^{a\cdot\ln z}$, $z\neq 1$
B) $e^{a\cdot\ln z}$
C) $e^{z\ln a}$
D) $e^{z\ln a}$, $a\neq 0$
E) $e^{a\cdot\ln z}$, $z\neq 0$

15. $w=a^z$ көрсеткіштік функциясының анықтамасын көрсетіңіз.

A) $e^{z\ln a}$, $a\neq 0$
B) $e^{a\cdot\ln z}$
C) $e^{z\ln a}$
D) $e^{z\ln z}$, $a\neq 0$
E) $e^{a\cdot\ln z}$, $z\neq 1$

16. sin z функциясының формуласын көрсетіңіз.

A) $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

B) $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

C) $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$

D) $\frac{e^{z}-e^{-z}}{2i}$

E) $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i}$

17. cos z функциясының формуласын көрсетіңіз.

A) $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$

B) $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

C) $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

D) $\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2i}$

E) $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i}$

18. sh z функциясының формуласын көрсетіңіз.

A) $\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2i}$

B) $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

C) $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$

D) $\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

E) $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i}$

19. ch z функциясының формуласын көрсетіңіз.

A) $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i}$

B) $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

C) $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$

D) $\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2i}$

E) $\dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

20. Коши-Риман шарты:

A) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \; \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

B) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$

C) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$

D) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

E) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

21. $w=u(x;y)+iv(x;y)$ функциясының туындысын көрсетіңіз.

A) $\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

B) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

C) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$

D) $\dfrac{\partial u}{\partial y}-i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

E) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}$

22. C доғасы бойынша $f(z)=u(x;y)+i\cdot v(x;y)$ функциясының интегралын есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\int\limits_c f(z)dt=\int\limits_c udy-vdx+i\int\limits_c vdy+udx$

B) $\int\limits_c f(z)dt=\int\limits_c udx+vdy+i\int\limits_c vdx+udy$

C) $\int\limits_c f(z)dt=\int\limits_c udx-vdy+i\int\limits_c vdx+udy$

D) $\int\limits_c f(z)dt=\int\limits_c udx+vdy-i\int\limits_c vdx+udy$

E) $\int\limits_c f(z)dt=\int\limits_c udx+vdx+i\int\limits_c vdy+udy$

23. D бір байламды облысында аналитикалық болатын функцияның интегралдау формуласын көрсетіңіз ($z_1\in D$, $z_2\in D$).

A) $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz=2\pi i\cdot f(z_2)$

B) $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = 0$

C) $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = 2\pi i \cdot f(z_1)$

D) $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),\ F'(z) = f(z),\ \ z \in D$

E) $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = 2\pi i$

24. D бір байламды облысында аналитикалық функция үшін Кошидің интегралдық теоремасын көрсетіңіз.

A) $\oint_c f(z)dz = 2\pi i$

B) $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$

C) $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$

D) $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$

E) $\oint_c f(z)dz = 0$

25. Кошидің интегралдық формуласын көрсетіңіз.

A) $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$

B) $\oint_c f(z)dz = 0$

C) $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$

D) $\oint_c f(z)dz = 2\pi i$

E) $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$

26. z=-1+$\sqrt{3}$ i комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

B) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

C) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

D) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

E) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

27. z=1+i комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

B) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

C) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

D) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

E) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

28. $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}$ i комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

B) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

C) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

D) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

E) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

29. z=-1-$\sqrt{3}$ i комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

B) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

C) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

D) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

E) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

30. z=-$\sqrt{3}$ -і комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

B) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

C) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

D) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

E) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

31. $z=-1+\sqrt{3}$ і комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

B) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$

C) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

D) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

E) $2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

32. $z=-1-\sqrt{3}i$ комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$

B) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

C) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

D) $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

E) $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

33. $z=\sqrt{3}-i$ комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

B) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

C) $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

E) $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

34. $z=1-\sqrt{3}$ і комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

B) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

C) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

D) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

E) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$

35. $z=-\sqrt{3}+$і комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

B) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$

C) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

D) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

E) $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

36. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)$ комплекс санын алгебралық түрде жазыңыз.

A) $ch1$
B) $\sin i$
C) $\cos 2$
D) $-ch1$
E) $ish1$

37. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$ комплекс санын алгебралық түрде жазыңыз.

A) $sh1$
B) $ish\,1$
C) $ich1$
D) $ch1$
E) $-sh1$

38. $\sin(2\pi - i)$ комплекс санын алгебралық түрде жазыңыз.

A) $ich1$
B) $ish1$
C) $-ish1$
D) $-ich1$
E) $ch1$

39. $\cos(\pi - i)$ комплекс санын алгебралық түрде жазыңыз.
A) $-ch1$
B) $ch\;1$
C) $ish1$
D) $-ich1$
E) $-sh1$

40. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-i\right)$ комплекс санын алгебралық түрде жазыңыз.

A) $-ch1$
B) $ch1$
C) $ish1$

D) $-ish1$

E) $-sh1$

41. 2^i өрнегінің негізгі мәнін табыңыз.

A) $i\sin\ln 2$

B) $\cos 2i$

C) $i\ln 2$

D) $\cos\ln 2 + i\sin\ln 2$

E) $i\cos\ln 2$

42. 2^{-i} өрнегінің негізгі мәнін табыңыз.

A) $\cos\ln 2 - i\sin\ln 2$

B) $\cos\ln 2 + i\sin\ln 2$

C) $\cos 2i$

D) $i\ln 2$

E) $i\cos\ln 2$

43. 3^i өрнегінің негізгі мәнін табыңыз.

A) $i\sin\ln 3$

B) $\cos 3i$

C) $i\ln 3$

D) $\cos\ln 3 + i\sin\ln 3$

E) $i\cos\ln 3$

44. 3^{-i} өрнегінің негізгі мәнін табыңыз.

A) $\cos\ln 3 - i\sin\ln 3$

B) $\cos\ln 3 + i\sin\ln 3$

C) $\cos 3i$

D) $i\ln 3$

E) $i\cos\ln 3$

45. 4^i өрнегінің негізгі мәнін табыңыз.

A) $i\sin\ln 4$

B) $\cos 4i$

C) $i\ln 4$

D) $\cos\ln 4 + i\sin\ln 4$

E) $i\cos\ln 4$

46. $\sqrt{i}$ түбірінің барлық мәндерін табыңыз.

A) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

47. $\sqrt{-4i}$ түбірінің барлық мәндерін табыңыз.

A) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
B) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
C) $1+i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$
D) $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$
E) $-1-i\sqrt{3}$; $1-i\sqrt{3}$

48. $\sqrt{9i}$ түбірінің барлық мәндерін табыңыз.

A) $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

B) $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C) $3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D) $3\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)$; $3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\right)$

E) $3\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)$; $3\left(\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\right)$

49. $\sqrt{-9i}$ түбірінің барлық мәндерін табыңыз.

A) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$; $\frac{3}{2}\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$

B) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
C) $1+i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$
D) $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$
E) $4\left(-1-i\sqrt{3}\right)$; $4\left(1-i\sqrt{3}\right)$

50. $\sqrt{16\,i}$ түбірінің барлық мәндерін табыңыз.

A) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}$

51. Есептеңіз: $\ln\left(1-\sqrt{3}i\right)$.

A) $\ln 2-i\frac{\pi}{3}$
B) $\ln 2+i\frac{2\pi}{3}$
C) $\ln 2+i\frac{5\pi}{6}$
D) $\ln 2-i\frac{\pi}{6}$
E) $\ln 2+i\frac{\pi}{6}$

52. Есептеңіз: $\ln(-1+i)$.

A) $\ln\sqrt{2}+i\frac{5\pi}{6}$
B) $\ln\sqrt{2}+i\frac{3\pi}{4}$
C) $\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}$

D) $\ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{3}$

E) $\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{6}$

53. Есептеңіз: $\ln\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)$.

A) $\ln 2 + i\frac{\pi}{3}$

B) $\ln 2 - i\frac{\pi}{6}$

C) $\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$

D) $\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}$

E) $\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}$

54. Есептеңіз: $\ln\left(-\sqrt{3} + i\right)$.

A) $\ln 2 + i\frac{5\pi}{6}$

B) $\ln 2 + i\frac{\pi}{6}$

C) $\ln 2 - i\frac{\pi}{6}$

D) $\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}$

E) $\ln 2 + i\frac{\pi}{3}$

55. Есептеңіз: $\ln\left(-1 - \sqrt{3}i\right)$.

A) $\ln 2 - i\frac{2\pi}{3}$

B) $\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}$

C) $\ln 2 - i\dfrac{\pi}{3}$

D) $\ln 2 + i\dfrac{5\pi}{6}$

E) $\ln 2 - i\dfrac{5\pi}{6}$

56. Есептеңіз: $\oint\limits_c \dfrac{(3-\cos(z-2))dz}{(z+2i)(2z+8)}$, C: $|z-1-i|=1$.

A) 0
B) πi
C) $2\pi i$
D) $\dfrac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

57. Есептеңіз: $\oint\limits_c \dfrac{(z^3-i)}{z(z+3i)}dz$, C: $|z+i|=\dfrac{1}{2}$.

A) πi
B) 0
C) $2\pi i$
D) $\dfrac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

58. Есептеңіз: $\oint\limits_c \dfrac{z^2+1}{z^3(z+i)}dz$, C: $|z+1-i|=1$.

A) $2\pi i$
B) πi
C) 0
D) $\dfrac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

59. Есептеңіз: $\oint\limits_c \dfrac{\sin z}{(z-1)^2(z+3i)}dz$, C: $|z-1+2i|=1$.

A) $\frac{1}{2}\pi i$
B) πi
C) $2\pi i$
D) 0
E) $3\pi i$

60. Есептеңіз: $\oint_c \frac{\sin z + z^2}{(z+1)^2(z-2i)}dz$, C: $|z+2-i|=1$.

A) $3\pi i$
B) πi
C) $2\pi i$
D) $\frac{1}{2}\pi i$
E) 0

61. Есептеңіз: $\oint_c \frac{e^{2z}}{z^2(z+i)}dz$, C: $|z-i|=\frac{1}{2}$.

A) 0
B) πi
C) $2\pi i$
D) $\frac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

62. Есептеңіз: $\oint_c \frac{(4-5z^2+z^3)}{(z-i)^2(z+3)}dz$, C: $|z+2-2i|=1$.

A) 0
B) πi
C) $2\pi i$
D) $\frac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

63. Есептеңіз: $\oint\limits_{c} \frac{\left(z^{2}-4\right)}{\left(z+1\right)\left(z^{2}+3\right)} dz$, C: $\left|z+2-2i\right|=1$.

A) 0
B) πi
C) $2\pi i$
D) $\frac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

64. Есептеңіз: $\oint\limits_{c} \frac{\left(3\sin 5z-z^{2}\right)}{\left(z^{2}+9\right)\left(z-4\right)} dz$, C: $\left|z-1+4i\right|=1$.

A) 0
B) πi
C) $2\pi i$
D) $\frac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

65. Есептеңіз: $\oint\limits_{c} \frac{\left(\sin 3z+2\right)}{z\left(z^{2}+4\right)} dz$, C: $\left|z+1+i\right|=1$.

A) 0
B) πi
C) $2\pi i$
D) $\frac{1}{2}\pi i$
E) $3\pi i$

66. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_{C} \frac{(z-1)dz}{(z+2)}$, C:|z-2-i|=5.

A) $-\frac{2}{9}\pi i$

B) $-\frac{5}{8}\pi i$

C) $-\frac{11}{2}\pi i$

D) $-6\pi i$

E) $\frac{2}{3}\pi i$

67. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{(z+5)dz}{z^2}$, C:|z+i|=2.

A) 0

B) $-\frac{5}{2}\pi i$

C) $2\pi i$

D) $-2\pi i$

E) $-3\pi i$

68. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{z^6 dz}{(z+i)^2}$, C:|z-1+2i|=2.

A) $-3\pi i$

B) 0

C) $-2\pi i$

D) $-\frac{5}{8}\pi i$

E) $-\pi i$

69. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{(e^{z+i}+1)dz}{z+i}$, C:|z-1+2i|=2.

A) $-\frac{5}{8}\pi i$

B) $4\pi i$

C) $-\frac{11}{2}\pi i$

D) -2π

E) $-\pi i$

70. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{(e^{z+1}+2)dz}{(z+1)^2}$, C:|z+1-i|=3.

A) $2\pi i$

B) $-\frac{4}{3}\pi i$

C) $-\frac{11}{2}\pi i$

D) $-\frac{5}{8}\pi i$

E) $-\pi i$

71. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{e^{3(z-1)}}{(z-1)^2}dz$, C:|z-2-i|=3.

A) $-\frac{5}{8}\pi^{\text{з}}$

B) $-\frac{12}{25}\pi i$

C) $-\frac{11}{25}\pi i$

D) $6\pi i$

E) $\frac{2}{25}\pi i$

72. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{(z^2-1)dz}{(z-2)^2}$, C:|z-1-i|=3.

A) $8\pi i$

B) $-\frac{2}{9}\pi i$

C) $-\frac{5}{8}\pi i$

D) $-\pi i$

E) $\frac{2}{3}\pi i$

73. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{(3z+1)dz}{z^2}$, C:|z-i|=2.

A) $-\pi i$

B) $6\pi i$

C) $-\frac{11}{2}\pi i$

D) $-\frac{5}{8}\pi i$

E) $\frac{2}{3}\pi i$

74. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{(z+3)dz}{(z-2)^2}$, C:|z-2-i|=4.

A) $\frac{2}{3}\pi i$

B) $-\frac{2}{9}\pi i$

C) $2\pi i$

D) $-\frac{5}{8}\pi i$

E) $-\pi i$

75. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз: $\oint\limits_C \frac{(4z+5)dz}{(z+i)^2}$, C:|z+i|=2.

A) $-\frac{2}{3}\pi$

B) $-\frac{2}{9}\pi i$

C) $-\frac{11}{2}\pi i$

D) $-\frac{5}{8}\pi i$

E) $8\pi i$

76. $f(z)=\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) 4 ретті полюс
B) 3 ретті полюс
C) 1 ретті полюс
D) Маңызды айрықша нүкте
E) Түзетілетін айрықша нүкте

77. $f(z)=\dfrac{\sin 8z-8z}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) 4 ретті полюс
B) 1 ретті полюс
C) 3 ретті полюс
D) Маңызды айрықша нүкте
E) Түзетілетін айрықша нүкте

78. $f(z)=\dfrac{ch5z-1}{e^z-1-z}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) 4 ретті полюс
B) 1 ретті полюс
C) Түзетілетін айрықша нүкте
D) 3 ретті полюс
E) Маңызды айрықша нүкте

79. $f(z)=\dfrac{\cos z^2-1}{shz-z-\dfrac{z^3}{6}}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) Маңызды айрықша нүкте
B) 4 ретті полюс
C) 3 ретті полюс
D) 1 ретті полюс
E) Түзетілетін айрықша нүкте

80. $f(z)=ze^{\frac{4}{z^2}}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) 3 ретті полюс
B) 1 ретті полюс

C) Түзетілетін айрықша нүкте
D) 4 ретті полюс
E) Маңызды айрықша нүкте

81. $f(z)=\dfrac{sh6z-6z}{chz-1-\dfrac{z^2}{2}}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) 1 ретті полюс
B) 4 ретті полюс
C) 3 ретті полюс
D) Маңызды айрықша нүкте
E) Түзетілетін айрықша нүкте

82. $f(z)=z\sin\dfrac{6}{z^2}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) Маңызды айрықша нүкте
B) Түзетілетін айрықша нүкте
C) 1 ретті полюс
D) 4 ретті полюс
E) 3 ретті полюс

83. $f(z)=\dfrac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) Түзетілетін айрықша нүкте
B) 4 ретті полюс
C) 3 ретті полюс
D) Маңызды айрықша нүкте
E) 1 ретті полюс

84. $f(z)=z^4\cos\dfrac{5}{z^2}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) Маңызды айрықша нүкте
B) Түзетілетін айрықша нүкте
C) 1 ретті полюс
D) 4 ретті полюс

E) 3 ретті полюс

85. $f(z)=\dfrac{e^{z^3}-1}{chz-z+\dfrac{z^2}{2}}$ функциясы үшін z=0 айрықша нүктесінің сипаттамасын анықтаңыз.

A) 1 ретті полюс
B) 4 ретті полюс
C) 3 ретті полюс
D) Маңызды айрықша нүкте
E) Түзетілетін айрықша нүкте

86. $w=(x^2–y^2–3x+1)+i(2xy–3y)$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) -3
B) 0
C) 2
D) 1
E) 3

87. $w=(1-\sin y\cdot e^x)+i\cos y\cdot e^x$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) i
B) 0
C) 2
D) -3
E) 1

88. $w=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ функциясының z=i нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 3
B) 0
C) 2
D) -3
E) 1

89. $w=(x^3–3xy^2+2x)+i(3x^2y–y^3+2y)$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 2

B) 0
C) 3
D) -3
E) 1

90. $w=e^{-2y}\cos 2x+ie^{-2y}\sin 2x$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 2i
B) 0
C) 2
D) -3
E) 1

91. $w=(3x^2-3y^2+x+1)+i(6xy+y)$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 1
B) 0
C) 2
D) -3
E) 3

92. $w=(e^{-y}\cos x+x)+i(e^{-y}\sin x+y)$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 1+i
B) 0
C) 2
D) 3
E) 1

93. $w=(x^2-y^2)+2xyi$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 0
B) 3
C) 2
D) -3
E) 1

94. $w=(e^{-y}\sin x+y)-i(e^{-y}\cos x+x)$ функциясының z=0 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 1-i

B) 0
C) 2
D) -3
E) 1

95. $w=(x^3–3xy^2-4x)+i(3x^2y–y^3-4y)$ функциясының $z=1$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) -1
B) 0
C) 2
D) -3
E) 1

96. f (t) түпнұсқасы бойынша F (p) бейнесін табыңыз: $\cos^2 t$.

A) $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$

B) $\dfrac{p^2+12}{(p^2+4)}$

C) $\dfrac{p+2}{p(p+4)}$

D) $\dfrac{p^2-32}{p(p^3+4)}$

E) $\dfrac{p^7+2}{p(p^2-1)}$

97. f(t) түпнұсқасы бойынша F(p) бейнесін табыңыз: $e^{3t}\sin 2t$.

A) $\dfrac{2}{(p-3)^2+4}$

B) $\dfrac{1}{(p-3)^2+5}$

C) $\dfrac{3}{(p-8)^2+4}$

D) $\dfrac{3}{(p-3)^2+7}$

E) $\dfrac{2}{(p+5)^2+9}$

98. f(t) түпнұсқасы бойынша F(p) бейнесін табыңыз: te^{-2t}.

A) $\frac{1}{(p+2)^2}$

B) $\frac{1}{(p+3)^2}$

C) $\frac{1}{(p+7)^2}$

D) $\frac{1}{(2p+2)^2}$

E) $\frac{1}{(3p+2)^2}$

99. f(t) түпнұсқасы бойынша F(p) бейнесін табыңыз: t^3.

A) $\frac{6}{p^4}$

B) $\frac{3}{p^4}$

C) $-\frac{7}{p^4}$

D) $\frac{5}{p^4}$

E) $-\frac{3}{p^4}$

100. f(t) түпнұсқасы бойынша F(p) бейнесін табыңыз: $e^{-2t}ch3t$.

A) $\frac{p+2}{(p+2)^2-9}$

B) $\frac{-p+2}{(p+3)^2-9}$

C) $-\frac{p+12}{(p+3)^2-14}$

D) $\frac{p-2}{(p+5)^2-9}$

E) $-\frac{p+3}{(p+2)^2-4}$

101. F(p) бейнесі бойынша f(t) түпнұсқасын табыңыз: $\frac{p-2}{p^2+4p}$.

A) $e^{-2t}(ch2t-2sh2t)$
B) $e^{2t}(cht-5sht)$
C) $e^{-2t}(cost+5sint)$
D) $e^{2t}(cost+5sint)$
E) $e^{-2t}(cost-4sint)$

102. F(p) бейнесі бойынша f(t) түпнұсқасын табыңыз: $\frac{p-3}{p^2+4p+5}$.

A) $e^{-2t}(cost-5sint)$
B) $e^{2t}(cost-5sint)$
C) $e^{-2t}(cost+5sint)$
D) $e^{2t}(cost+5sint)$
E) $e^{-2t}(cost-4sint)$

103. F(p) бейнесі бойынша f(t) түпнұсқасын табыңыз: $\frac{2p}{p^2+2p+5}$.

A) $e^{-t}(2cos2t-sin2t)$
B) $2e^{2t}(cos2t+2sint)$
C) $e^{-2t}(cost+5sint)$
D) $e^{2t}(cost+5sint)$
E) $e^{-2t}(cost-4sint)$

104. F(p) бейнесі бойынша f(t) түпнұсқасын табыңыз: $\frac{p+2}{p^2-2p+2}$.

A) $e^{t}(cost+3sint)$
B) $e^{2t}(cost-5sint)$
C) $e^{-2t}(cost+5sint)$
D) $e^{2t}(cost+5sint)$
E) $e^{-2t}(cost-4sint)$

105. F(p) бейнесі бойынша f(t) түпнұсқасын табыңыз: $\frac{3p-2}{p^2-4p+8}$.

A) $e^{2t}(3cos2t+2sin2t)$
B) $e^{2t}(cost-5sint)$
C) $e^{-2t}(cost+5sint)$
D) $e^{2t}(cost+5sint)$
E) $e^{-2t}(cost-4sint)$

10 ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫНЫҢ ЖАУАП МАТРИЦАСЫ

Кесте 1 – дұрыс жауаптар коды

Сұрақ нөмірі	Күрделілік деңгейі	Дұрыс жауабы	Сұрақ нөмірі	Күрделілік деңгейі	Дұрыс жауабы
1	1	A	39	2	A
2	1	B	40	2	A
3	1	C	41	2	D
4	1	D	42	2	A
5	1	E	43	2	D
6	1	A	44	2	A
7	1	C	45	2	D
8	1	D	46	2	E
9	1	E	47	2	A
10	1	A	48	2	A
11	1	B	49	2	A
12	1	C	50	2	E
13	1	D	51	2	A
14	1	E	52	2	B
15	1	A	53	2	C
16	1	B	54	2	A
17	1	C	55	2	A
18	1	D	56	3	A
19	1	E	57	3	B
20	1	A	58	3	C
21	1	B	59	3	D
22	1	C	60	3	E
23	1	D	61	3	A
24	1	E	62	3	A
25	1	A	63	3	A
26	2	A	64	3	A
27	2	B	65	3	A
28	2	C	66	3	D
29	2	A	67	3	C
30	2	A	68	3	C
31	2	D	69	3	B
32	2	E	70	3	A
33	2	A	71	3	D
34	2	A	72	3	A
35	2	A	73	3	B
36	2	A	74	3	C
37	2	B	75	3	E
38	2	C	76	3	A

Сұрақ нөмірі	Күрделілік деңгейі	Дұрыс жауабы	Сұрақ нөмірі	Күрделілік деңгейі	Дұрыс жауабы
77	3	B	92	2	A
78	3	C	93	2	A
79	3	D	94	2	A
80	3	E	95	2	A
81	3	A	96	2	A
82	3	A	97	2	A
83	3	A	98	2	A
84	3	A	99	2	A
85	3	A	100	2	A
86	2	A	101	2	A
87	2	A	102	2	A
88	2	D	103	2	A
89	2	A	104	2	A
90	2	A	105	2	A
91	2	A			

ҚОСЫМША А

Кесте 2 – Түйіндеме

Лаплас түрлендірулерінің қарастырылған қасиеттері операциялық есептеулердің негізгі ережелерін (аппаратын) қамтиды. Қолдануға қолайлы болу үшін осы қасиеттерді атап шығамыз:

№	*Атаулары*	*Лаплас түрлендірулерінің қасиеттері*
1	Сызықтылық	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$
2	Ұқсастық	$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \lambda > 0$
3	Жылжыту (өшу)	$e^{at} \cdot f(t) \div F(p-a)$
4	Кешігу	$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p), \tau > 0$
5	Түпнұсқаның дифференциалдануы	$f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0)$, $f''(t) \div p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$, $f'''(t) \div p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0)$, ..., $f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$.
6	Кескіннің дифференциалдануы	$F'(p) \div -t \cdot f(t)$, $F''(p) \div (-1)^2 t^2 \cdot f(t)$, ..., $F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$, ...,
7	Түпнұсқаның интегралдануы	$\int_0^t f(\tau) \cdot \mathrm{d}\tau \div \frac{F(p)}{p}$
8	Кескіннің интегралдануы	$\int_p^\infty F(\rho) \cdot \mathrm{d}\rho \div \frac{f(t)}{t}$
9	Кескіннің көбейтіндісі	$F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$
10	Түпнұсқалардың көбейтіндісі	$f_1(t) \cdot f_2(t) \div \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p-z) dz$

ҚОСЫМША Б

Кесте 3 - Түрнұсқалар мен кескіндер кестесі

Іс жүзінде жиі кездесетін түпнұсқалар мен олардың кескіндерінің өзара сәйкестілігін көрсететін қысқаша кесте құрамыз.

Формулалар реті	***Түпнұсқа*** $f(t)$	***Кескін*** $F(p) \div \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
5	$sh\, \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6	$ch\, \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
7	$e^{at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
8	$e^{at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at} \cdot sh\, \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
10	$e^{at} \cdot ch\, \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$

11	$e^{at}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{\omega\cdot\cos\varphi+(p-a)\cdot\sin\varphi}{(p-a)^2+\omega^2}$
12	$e^{at}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{(p-a)\cdot\cos\varphi-\varphi\cdot\sin\varphi}{(p-a)^2+\omega^2}$
13	t	$\dfrac{1}{p^2}$
14	t^n (n-бүтін сан)	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
15	$t^n\cdot e^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
16	$t\cdot\sin\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\cos\,\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
18	$t\cdot sh\;\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
19	$t\cdot ch\;\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
20	$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
21	$e^{at}\cdot t\cdot\cos\;\omega t$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
22	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$

23	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t\, ch\, \omega t - sh\, \omega t)$	$\frac{1}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
24	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
25	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{p\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
26	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\left(\frac{p-a}{p-b}\right)$
27	$\sin(t-a),\quad a>0$	$\frac{e^{-ap}}{p^2+1}$
28	$\cos(t-a),\quad a>0$	$\frac{p\cdot e^{-ap}}{p^2+1}$
29	$Si\, t=\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\frac{arcctg\ p}{p}$
30	$Ci\, t=-\int_t^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$	$\frac{1}{p}\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
31	$t^n\cdot\sin\omega t$	$\frac{\operatorname{Im}(p+i\cdot\omega)^{n+1}}{\left(p^2+\omega^2\right)^{n+1}}\cdot n!$

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Айдос Е.Ж., Боровский Ю.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление: Учебное пособие. -Алматы: КазНТУ. 2003. 155 с.
2. Ангилейко И.М., Козлова Р.В. Задачи по теории функции комплексной переменной. – Минск: Высшая школа, 1991.
3. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционные исчисления. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1986.
4. Апышев О.Д. Комплексті айнымалы функциялар теориясы – Өскемен: С. Аманжолов атындағы ШҚМУ баспасы, 2004 – 48 б.
5. Базарбаева С.Е., Дулэпо В.М., Қасымбеков С.К. Жоғары математика. MathCAD. Математика есептерінің компьютерлік шешуі.- Алматы: АЭжБИ, 2000-52б.
6. Белослюдова В.В. Элементы теории функций комплексного переменного: Методические указания для студентов второго курса специальностей 210440, 220440, 340140 / ВКГТУ. – Усть – Каменогорск, 2004.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985.
8. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т 4.- М.:Едиториал УРСС, 2001.-352 с.
9. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1970.
10. Грищенко А.Е., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Теория функций комплексного переменного, - Киев: Вища школа, 1986.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задач. Часть 2. Учебное пособие для втузов.-М.: Высшая школа, 1999.-416 с.
12. Долгих В.Я. Элементы теории функций комплексного переменного. Операционные исчисления. – Новосибирск: НГТУ, 2002.
13. Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций.-М.: Наука, 1969.
14. Ералиев С.Е. Амалдық есептеулердің элементтері. Оқу құралы. Есептер жинағы.-Алматы: АЭжБИ, 2004.-40 б.
15. Жантасов Т.Ғ. Комплекс аргументті функциялар теориясы және операциялық есептеулер. ШҚМТУ: 2001.
16. Көксалов Қ. Жоғары математика: Қатарлар. Комплекс айнымалы функцияларының теориясы мен амалдық есептеулердің элементтері. Ықтималдықтар теориясының негіздері.-Алматы, 2002.-201б.
17. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционные исчисления. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1989.
18. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.

19. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970, 1985, Т.1,2.
20. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 4-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2006.-256с.
21. Привалов И.И. Комплекс айнымалы функцяларының теориясына кіріспе. - Алматы: Мектеп, 1983.
22. Сборник задач по математике (для вузов). Специальные разделы математического анализа. / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
23. Тілепиев М.Ш., Ералы С.Е. Комплекс айнымалысының функциялары. Оқу құралы. Есептер жинағы.- Алматы: АЭжБИ, 2005-53б.
24. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969. Т1, 2.
25. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.:Высшая школа.1983-112 с.